14-Équations différentielles

Ex 1 : Résoudre les équations différentielles sur les intervalles précisés :

1. $y'(x) - \tan(x)y + (\cos x)^2 = 0$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$;
2. $y' - y = \sin(2x)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' + \frac{1}{2(x+i)}y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
4. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$ sur $\mathbb{R}$;
5. $xy' - 2y = x$ sur $\mathbb{R}$;
6. $|x|y' + (x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 2 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f'(x) + f(x) = \ell + \frac{m}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}$, avec $\lim_{+\infty} \varepsilon = 0$. Donner un développement asymptotique de f en $+\infty$.

Ex 3 : Soit $(E) : (1-x^2)y' - xy = f(x)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]-1,1[$.
2. Soit $h : x \mapsto \sqrt{1-x^2} -$ Arccos x. Démontrer que h est dérivable sur un intervalle à préciser et calculer h'.
3. Résoudre (E) sur $]-1,1[$ pour $f(x) = 1-x$.
4. Montrer que s'il existe une solution de (E) sur $[-1,1]$, alors $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,\mathrm{d}t = 0$.
5. Soit $f(x) = ax+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une solution de (E) sur $[-1,1]$ si, et seulement si, $b=0$.

Ex 4 : Résoudre sur les intervalles appropriés les équations différentielles suivantes

a. $y'' + y' - 2y = \cos(2x)$;
b. $y'' - 4y' + 3y = 6 + 4e^x + 8e^{-x}$;
c. $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$;
d. $y'' + y = \cos^2 x$;
e. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$;
f. $y'' - y = \frac{2e^x}{1+e^x}$:
g. $y^{(3)} + y'' = 1$;
h. (*) $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{4\ln(t)}{t}$;
i. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$.
j. $(1+e^{2t})(y''-y) = 2e^t$.
k. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Ex 5 : (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) \geq 0$. Montrer que $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ex 6 : Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $\phi : E \to E$ par $\phi(f) : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f'(t) + tf(t). \end{cases}$

1. Soit λ un nombre complexe non nul et μ une racine carrée complexe de λ : $\mu^2 = \lambda$. Prouver que $\mathrm{Ker}\,(\phi^2 - \lambda Id) = \mathrm{Ker}\,(\phi - \mu Id) \oplus \mathrm{Ker}\,(\phi + \mu Id)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.
3. À l'aide des deux premières questions, déterminer alors les éléments propres de ϕ^2.
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' + 2xy' + (x^2+3)y = 0$.

Ex 7 : (*) On considère l'équation différentielle $y'' - y = |\cos(x)|$. Existe-t-il des solutions positives ? Bornées ? Positives et bornées ?

Ex 8 : Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.
(Pour cela, on pourra poser $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ et $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$).

Ex 9 : Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x)$.

Ex 10 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$, puis trouver toutes les fonctions f solution de l'équation étudiée.

Ex 11 : *1.* Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$, avec $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre $y'' + y = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cos(nt)$.

Ex 12 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $y'' + |y| = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0$.

1. Montrer que : $y \leq a$.

2. Déterminer y si $a \leq 0$.

3. On suppose $a > 0$. Montrer que y a exactement deux zéros $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Déterminer y.

Ex 13 : On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $(E) : ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = 0$.

1. Vérifier que $\varphi : t \mapsto e^t$ détermine une solution de (E).

2. Donner une expression du wronskien w de deux solutions de cette équation.

3. En déduire une solution de (E) indépendante de φ et exprimer la solution générale de (E).

Ex 14 : Sur $\mathbb{R}$, soit $(E) : 4tx'' + 2x' - x = 0$.

1. Déterminer une solution DSE φ_1 telle que $\varphi_1(0) = 1$.

2. Exprimer φ_1 en fonction de ch sur $\mathbb{R}_+^*$ et à l'aide du wronskien, résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On se place sur $\mathbb{R}_-^*$. Reprendre les mêmes questions, en exprimant φ_1 en fonction de cos.

4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Ex 15 : Soit (E) l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

1. Trouver une solution f de (E) développable en série entière au voisinage de 0 et telle que $f(0) = 1$.

2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles, puis résoudre (E).

Ex 16 : Soit l'équation différentielle $(*) : t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$.

1. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Écrire $(*)$ sous forme d'un système différentiel linéaire.

3. Soit l'équation différentielle $(**) : t^2y'' + 4ty' + 2y = e^t$. À l'aide de la méthode de la variation des constantes, donner les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On propose une autre méthode de résolution. Vérifier qu'il existe une solution particulière de $(**)$ de la forme $y : t \mapsto \frac{z(t)}{t}$, avec z une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
En déduire l'ensemble des solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 17 : *1.* Montrer qu'il existe une solution h de l'équation $(E) : xy'' + y' + y = 0$, développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.
2. Montrer que h s'annule sur $[0, 2]$, puis qu'elle s'annule qu'une seule fois sur $[0, 2]$.

Ex 18 : Soient $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(E) : y'' + ay' + by = 0$. Montrer que (E) admet un système une base de solutions (f, g) avec f paire et g impaire si et seulement si a est impaire et b est paire.

Ex 19 : (*) Soient r et q deux fonctions continues définies sur $I = [a, b]$ telles que : $\forall x \in I,\ r(x) \leq q(x)$. On considère les équations différentielles : $(E_1) : y'' + qy = 0$, et $(E_2) : z'' + rz = 0$.
Soit x_0 un zéro d'une solution y de l'une de ces équations. On admet qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\},\ y(x) \neq 0$.

1. Soit y une solution de (E_2) et x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y. $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ?
2. Soient z une solution de (E_1) et $W(x) = y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.
3. Montrer que z a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.
4. Soit u une solution de (E_2). Montrer que u est soit proportionnelle à y, soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.

Ex 20 : (*) Soient $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que : $q \geq m$. Soit $(H) : y'' + qy = 0$. Soit f une fonction non nulle solution de (H).

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) + if'(t) \neq 0$.
2. Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que $u^2 + v^2 = 1$. Soit $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(0) + iv(0) = e^{i\alpha_0}$. Soit $\theta : t \mapsto \alpha_0 + \int_0^t (uv' - u'v)$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ u(t) + iv(t) = \exp(i\theta(t))$.
3. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que $f + if' = \rho \exp(i\theta)$.
4. Exprimer θ' en fonction de q et θ. En déduire que θ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ sur $\theta(\mathbb{R}_+)$.
5. Montrer que f possède une infinité de zéros.

Ex 21 : Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère l'équation différentielle : $(x^2 - 1)y'' - 2pxy' + p(p + 1)y = 0$.

1. Montrer, à l'aide de dérivations successives de l'équation différentielle, que toute solution y de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p + 1$. Déterminer y si : $y(1) = 0$. Même question si $y(-1) = 0$.
2. Donner selon p, la dimension de $\mathcal{S}_\mathbb{R}$ des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Ex 22 : Soit $(E) : (2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$.

1. Chercher une solution de (E) de la forme $\varphi : x \mapsto e^{ax}$.
2. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $Z = y/\varphi$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z = Z'$ est solution d'une équation linéaire d'ordre un à préciser.
3. Résoudre (E) sur $]-1/2, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1/2[$.
4. Trouver l'ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ et en la dimension et une base.

Ex 23 : *1.* Résoudre l'équation $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ via le changement de variable $t = e^x$.
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t^2y'' + 4ty' + 2y = 1$.

Ex 24 : Soit l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Faire le changement de variable $x = t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' - z = 0$.
   En déduire les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Faire le changement de variable $x = -t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' + z = 0$.
   En déduire les solutions sur $\mathbf{R}_-^*$.
3. En déduire la solution sur $\mathbf{R}$. On pourra l'exprimer sous forme de série entière.

Ex 25 : Résoudre $y''' - 3y' + 2y = \sin x$.

Ex 26 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Résoudre $\sum_{k=0}^{n} y^{(k)}\omega^{n-k} = 0$.

Ex 27 : On considère le système différentiel suivant : $(E) : \begin{cases} x'(t) &= 2tx(t) - y(t) + t\cos(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2ty(t) + t\sin(t) \end{cases}$.

1. Déterminer $\mathrm{Vect}(X_1, X_2)$ l'espace des solutions de l'équation homogène associée à (E) en procédant au changement de fonction $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.

2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $X : t \mapsto a(t)X_1(t) + b(t)X_2(t)$.

3. Résoudre (E).

Ex 28 : Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' &= \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' &= -\sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' &= (2-t)x + (t-1)y \\ y' &= 2(1-t)x + (2t-1)y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' &= -x - y + t^2 + 2t + 3 \\ y' &= 2x + y - t^2 - 2t - 1 \end{cases}$
(chercher des solutions particulières avec x et y polynomiales de degré respectivement 1 et 2).

5. $\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' &= x + 8y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' &= -6x + 5y + 3z + 1/t \\ y' &= -8x + 7y + 4z \\ z' &= -2x + y + z + 2/t \end{cases}$, on montrera que $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{cases} x' &= x - z \\ y' &= x + y + z \\ z' &= -x - y + z \end{cases}$

9. $\begin{cases} x'' &= x - 2y \\ y'' &= -3x + 2y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' &= x - y + t \\ y' &= 2x + 4y + e^t \end{cases}$

Ex 29 : (*) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note (S) le système différentielle :
$\forall p \in [\![1, n]\!],\ x_p^{(m)}(t) = \sum_{q=1}^{n} a_{p,q}x_q(t)$.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Ex 30 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre $y^{(n)} = f$, avec : $y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0$.

Ex 31 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et Y une solution non nulle, définie sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = AX$. Montrer que $t \mapsto \|Y(t)\|$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ ($\|.\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$).

Ex 32 : Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue et T-périodique. Montrer que le système différentiel $X' = AX$ admet une solution Y non nulle, définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t+T) = \lambda Y(t)$.

Ex 33 : Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Ex 34 : Résoudre les équations non linéaires suivantes

1. $y'y = x$; *2.* $y' = |y|$; *3.* $y' + e^{x-y} = 0$; *4.* $y' = y^2$.

Ex 35 : Soient $T, N \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, R^2)$ telles que $(T(t), N(t))$ soit une base orthonormée pour tout $t \in I$
Montrer qu'il existe $c : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $T' = cN$ et $N' = -cT$.