15-Calcul Différentiel

Ex 1 : Dans chacun des cas suivants, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^2$, est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$?

a. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{ch}\,(xy)-\cos(xy)}{x^2y^2} & \text{si } xy\neq 0\\ 1 & \text{si } xy=0\end{cases}$

b. $f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

d. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$

e. $f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}} & \text{si } x^2+y^2<1\\ 0 & \text{si } x^2+y^2\geq 1\end{cases}$

f. $f(x,y)=\begin{cases}x^2 & \text{si } |x|>y\\ y^2 & \text{si } |x|\leqslant y\end{cases}$

g. $f(x,y)=\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\varphi(t)dt,\ \varphi\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

h. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^x-x-\cos(y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1/2 & \text{sinon}\end{cases}$

i. $f(x,y)=\min(x,y^2)$.

j. ***(CCP 52)*** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Ex 2 : Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ telle que : $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ |f(x)-f(y)|\ \leq\ \|x-y\|^2$. Montrer que f est constante.

Ex 3 : (*) Soit $x=(x_0,...,x_n), y=(y_0,...,y_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ et : $f(x,y)=\left(\displaystyle\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j=k}}x_iy_j\right)_{k\in[\![0,2n]\!]}\in\mathbb{R}^{2n+1}$.

1. Soient $x,y\in\mathbb{R}^{n+1}$ non nuls. Montrer que $f(x,y)$ est non nul.

2. Soient u et v définies sur $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ par $u:x\mapsto f(x,x)$ et $v:x\mapsto\dfrac{f(x,x)}{\|f(x,x)\|}$ où $\|\ .\ \|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. Calculer les différentielles de u et v.

3. Soit $x\in\mathbb{R}^{n+1}$ non nul. Calculer $\mathrm{rg}\,(dv(x))$.

Ex 4 : Montrer que la fonction $(x,y)\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\cos(ny)}{\sqrt{n}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

Ex 5 : Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ différentiable telle que : $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\forall t\in\mathbb{R}^*,\ f(tx)=tf(x)$. Calculer $f(0)$, puis montrer que f est linéaire.

Ex 6 : Montrer que $f:\begin{cases}\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}\\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1(P(t))^3dt\end{cases}$ est différentiable et donner sa différentielle.

Ex 7 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f,g,h des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ telles que $f\leq g\leq h$. Soit $a\in U$ tel que f et h soient différentiables en a et $f(a)=h(a)$. Montrer que g est différentiable en a.

Ex 8 : Soient $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>|y|\}$ et $f:(x,y)\mapsto\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(x+y\cos(t))dt$.

a. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, puis déterminer ∇f en tout point de Ω.

b. Calculer $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Ex 9 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $g : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t,y)dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 10 : Soit l'application $f : U \to \mathbb{C}$, avec U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.
Pour $z = x + iy \in U$, avec x et y réels, on pose $f(z) = \tilde{f}(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$, avec $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ réels.
On dit que f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ si $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe.

1. Montrer que f est continue en $z_0 \in U$ si et seulement si P et Q sont continues en (x_0, y_0).
2. Montrer que f est dérivable en $z_0 \in U$ si et seulement si P et Q sont différentiable en (x_0, y_0) et $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Déterminer f''.
4. En déduire dans ce cas que : $\Delta(P) = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ et $\Delta(Q) = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$.

Ex 11 : *1.* Si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, déterminer la limite de $\dfrac{1}{\|H\|} \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$ lorsque H tend vers 0.
2. En déduire que $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0 et préciser sa différentielle en 0.

Ex 12 : On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $f : z \mapsto 1/z$ est différentiable en tout point de $\mathbb{C}^*$ et donner sa différentielle.

Ex 13 : Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E. On pose $f : x \mapsto \dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ définie sur $E \setminus \{0\}$.
1. Calculer $f(\alpha x)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in E \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
3. Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle.
4. En déduire que u admet au moins une valeur propre.

Ex 14 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que : $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geq 1$.
Montrer que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ex 15 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$.

a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$. f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Ex 16 : Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $f : x \mapsto \langle a, x \rangle \langle b, x \rangle$ définie sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminer sa matrice hessienne en tout point.
2. Montrer qu'il existe $H \in S_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \dfrac{1}{2} x^T H x$.

Ex 17 : (*) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit f définie par : $\forall (x,y) \in D(0,R),\ f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n$. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Ex 18 : Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$, définies sur un domaine D solutions de

a. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + y^3 + x^2$ et $D = \mathbb{R}^2$;

b. $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$ et $D = \mathbb{R}^2$;

c. $-y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ et $D = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$;

d. $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$ et $D = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$;

e. $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ et $D = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$;

f. $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ et $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

g. $x^2 + y^2 + \left(x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) f = 0$ et $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

h. $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{x}$ et $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (poser $f(x,y) = g\left(x, \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)$) ;

Ex 19 : Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$, définies sur D, solutions de

a. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + x$ et $D = \mathbb{R}^2$;

b. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ et $D = \mathbb{R}^2$ (poser $u = x + y$ et $v = 2x + y$) ;

c. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ et $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$ (poser $u = xy$ et $v = x/y$) ;

d. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1)$ et $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\alpha \neq 1/2$ (passer en polaire) ;

Ex 20 : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et on pose $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit $\phi : f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} - af$.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire de E dans F.

2. Soit $G = \{(x,y) \mapsto \alpha(y)\exp(ax),\ \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$. Montrer que $G \subset \mathrm{Ker}\,(\phi)$.

3. Soit $A \in E$. Soit : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \exp(ax)\displaystyle\int_0^x A(t,y)e^{-at}dt$. Montrer que f admet des dérivés partielles sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer. Montrer que $\phi(f) = A$.

4. Montrer que $G = \mathrm{Ker}\,(\phi)$.

5. Trouver toutes les fonctions $f \in E$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - af(x,y) = 2x - 3y$.

Ex 21 : Étude des extrema locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ quand $f(x,y) =$

a. $x^2 + xy + y^2 - 5x - y$;

b. $2x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 6xy^2$;

c. $(x-y)^2 + (x+y)^3$;

d. $xe^y + ye^x$;

e. $x^4 + y^4 + y^3$;

f. $x^2y^2(1 + x + 2y)$;

g. $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$;

h. $\dfrac{x+y+1}{3} - \sqrt[3]{xy}$, sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Ex 22 : Étude des extrema de f sur D quand $f(x,y) =$

1. $(y-x)^3 + 6xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$;

2. $x^3 - 3x(1+y^2)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$;

3. $y^3x^4 + \ln(1+y^4)$ et $D = [-1,1]^2$;

4. $(x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ et $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant 1/2 \text{ et } |x-y| \leqslant 1/2\big\}$.

Ex 23 : Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

1. Soit $v \in E$. Montrer que $g : x \mapsto f(x) - \langle x|v\rangle$ admet un minimum absolu.
2. Montrer que ∇f est une surjection de E dans E.

Ex 24 : Déterminer le maximum du produit xyz lorsque (x,y,z) varie avec $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \\ x+y+z = a \quad (a>0) \end{cases}$

Ex 25 : (*) Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $M = \max(f,g)$.
On note $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x,y)\}$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) > g(x,y)\}$ et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) < g(x,y)\}$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ un point en lequel M réalise un minimum.

1. Donner un condition nécessaire et suffisante pour que M soit différentiable en $b \in \mathbb{R}^2$.
2. Que dire si a est dans U ou V ?
3. On suppose que a est dans F. Montrer que $((\nabla f)(a), (\nabla g)(a))$ est liée.

Ex 26 : Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe $(\forall x, y \in U, \forall t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y))$ et différentiable en $a \in U$.

1. Pour $p = 1$, montrer que si $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum absolu en a.
2. Si $df(a) = 0$, montrer que f admet un minimum absolu en a.
3. On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^2$.
   - **a.** Soient $h \in \mathbb{R}^p$ et $\varphi : t \mapsto f(a+th)$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$ (avec $r>0$) et que : $\forall t \in]-r,r[,\ \varphi''(t) = h^T H_f(a+th)h$.
   - **b.** Montrer que f est convexe si et seulement si : $\forall a \in U,\ H_f(a) \in S_p^+(\mathbb{R})$.

Ex 27 : Trouver, dans les cas suivants, les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telles que : $\Delta(g) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$,

- **a.** avec $I =]-1;1[$ et $g(x,y) = f\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0;+\infty[$;
- **b.** avec $I = \mathbb{R}$ et $g(x,y) = f(y/x)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$.

Ex 28 : Soient $f \in \mathcal{C}^2$ et $F : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,...,0)\} \mapsto f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\Delta F = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$.

Ex 29 : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$ et Σ la surface associée.

1. Déterminer les points critiques de f. f admet-elle un extremum global ?
2. Soit (a,b) un point critique de f, déterminer l'équation du plan tangent à Σ en $(a,b,f(a,b))$
3. Exprimer l'équation du plan tangent en $(1,1,1)$
4. Exprimer la différentielle de f en $(1,1)$ puis g telle que $g(x,y) = (f(x,y), f(x,y))$.

Ex 30 : Soit $F : M \mapsto M^T M$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}f_{I_n}(H) = H^T + H$.
2. En déduire que l'espace tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ex 31 : Étudier les extrema de $f : (x,y) \mapsto \exp(axy)$ sur $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^3 + y^3 + x + y = 4\}$, avec $a > 0$.
