À rendre pour le jeudi 12 septembre

DM NORMAL

Les 3/2 pourront commencer directement par la partie IV en attendant l'avancement du cours.

Dans tout ce problème on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Partie I : convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Étude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*

a. Donner un équivalent de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.

b. En déduire pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2. *Étude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a. Étudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.

b. Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geqslant \pi$:

$$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

c. Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

d. En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

3. *Domaine de définition de la fonction f*

Préciser domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

4. *Python*

a. Écrire une fonction `rectangle(u,a,b,n)` qui détermine une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b u(t)dt$ par $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. On supposera que u représente une fonction définie et continue sur $[a, b]$.

b. À l'aide de la fonction `rectangle(u,a,b,n)`, en déduire une fonction `I(a)` qui donne une valeur approchée de $I(a)$ pour les valeurs de a appropriées (on fera apparaître un message d'erreur si nécessaire). On prendra $n = 100$.

Partie II : Étude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0.

On se propose dans cette partie d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 et on écrit à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t.$$

1. *Limite de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t$

a. Soit $\alpha \in]0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1\right) dt$.

b. En déduire que :

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t = 1 - \cos(1).$$

2. *Limite de l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t$

a. Justifier l'égalité suivante :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t = \cos(1) + \alpha \sin(1) - \alpha(\alpha+1) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}} \,\mathrm{d}t.$$

b. Calculer l'expression $\displaystyle\alpha(\alpha+1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+2}} \,\mathrm{d}t$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t$, quand α tend vers 0 par valeurs supérieures.

c. En déduire la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie III : Étude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.

1. *Une autre expression de la fonction f*

a. Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t.$$

b. À l'aide d'une intégration par parties justifiée, établir que :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t.$$

En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0,2[$.

2. *Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.*

On considère la fonction auxiliaire φ définie pour $t \in \mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \dfrac{1 - \cos(t)}{t^2}$.

a. Quelle est la limite L de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 ?
On posera désormais $\varphi(0) = L$, de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction φ reste strictement positive sur $[0, \pi]$ et justifier qu'elle admet sur $[0, \pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).

c. Établir les inégalités suivantes :

$$f(\alpha) \geqslant \alpha \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t \geqslant \alpha\mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

d. En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

Partie IV : Calcul de l'intégrale $f(1)$

1. *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a. Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t.$$

b. Préciser la valeur de I_0 et prouver que l'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

c. On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.
Quelle est la limite ℓ de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0 ?
On posera désormais $\psi(0) = \ell$, de sorte que ψ est ainsi définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

d. Montrer que ψ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

e. Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\, \mathrm{d}u.$$

2. *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$
On considère une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ du segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$.
À tout entier naturel n, on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t)\, \mathrm{d}t.$$

a. Démontrer que : $u_n = \dfrac{g(0)}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1} \displaystyle\int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t)\, \mathrm{d}t.$

b. A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

c. En déduire la valeur de $f(1)$.

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ni vide, ni réduit à un point, et un ensemble E de fonctions $f : I \to \mathbb{R}$. On se donne une application $J : E \to \mathbb{R}$ définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir f et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de J sur E :

$$\min_{f\in E} J(f)$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points f de E en lesquels J atteint son minimum. On note $E^k_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. La notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction y.

A. Un lemme de du Bois-Reymond

1. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = (1-t^2)^3$ si $|t| \leq 1$ et $h(t) = 0$ sinon. Montrer que $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et représenter son graphe. Écrire les codes PYTHON qui vous permettraient de représenter h sur $[-2,2]$. La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?

2. Soit x_0, x_1 des nombres réels tels que $x_0 < x_1$. Construire à partir de h une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $g(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0, x_1[$ et $g(x) = 0$ ailleurs.

3. Soit $F \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $u \in E^2_{0,0}$. Démontrer qu'alors F est nulle.

B. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E^2_{a,b}$ pour un couple donné (a,b) de nombres réels. La fonction J est définie sur E par la formule

$$J(f) = \int_0^1 \Big[P\Big(f(x)\Big) + Q\Big(f'(x)\Big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes fixés.
Soit $f_0 \in E$. On se propose de prouver que si $J(f_0) \leq J(f)$ pour tout $f \in E$, alors f_0 vérifie une certaine équation différentielle. Soit $u \in E^2_{0,0}$.

1. Montrer que l'application q définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(a_0, a_1, ..., a_r)$ de nombres réels telle que $q(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k t^k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $a_1 = \displaystyle\int_0^1 [P'\left(f_0(x)\right)u(x) + Q'\left(f_0'(x)\right)u'(x)]\mathrm{d}x$.

2. On suppose que pour tout $f \in E, J(f_0) \leq J(f)$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et en déduire l'équation différentielle :

$$\forall x \in [0,1], \quad P'\Big(f_0(x)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[Q'\Big(f_0'(x)\Big)\Big] \qquad (\Delta)$$

3. *Premier exemple.* On choisit $E = E^2_{0,1}$ et $J = J_1$ définie par $J_1(f) = \displaystyle\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\mathrm{d}x$.

a. Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à $E^2_{0,1}$.

b. Montrer que J_1 admet un minimum sur $E^2_{0,1}$, préciser sa valeur ainsi que les points de $E^2_{0,1}$ où ce minimum est réalisé. (On pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

4. *Deuxième exemple.* On choisit $E = E^2_{0,0}$ et $J = J_2$ définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 \Big(f'(x)\Big)^2 + \Big(f'(x)\Big)^3 \mathrm{d}x$$

a. Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à $E^2_{0,0}$.

b. Montrer que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$. (On pourra se servir de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par la formule $f(x) = x^2(1-x)$.)

C. Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$. On rappelle que l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que g^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que l'on note L^2.
On pose également, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(t) = e^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Dans les deux questions suivantes, on considère $f \in E$.

1. Montrer que le produit ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(x)f'(x)$ ne tend *pas* vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

2. En déduire que $f' \in L^2$, puis que $f(x)f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Dans cette partie, la fonction J est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left[\Big(f(x)\Big)^2 - \Big(f'(x)\Big)^2 + \Big(f''(x)\Big)^2\right] \mathrm{d}x$$

3. Montrer que pour tout $f \in E$ et tout réel $A > 0$,

$$\int_0^A \left[\Big(f(x)\Big)^2 - \Big(f'(x)\Big)^2 + \Big(f''(x)\Big)^2\right] \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^A \Big[f(x) + f'(x) + f''(x)\Big]^2 \mathrm{d}x + \Big(f(0) + f'(0)\Big)^2 - \Big(f(A) + f'(A)\Big)^2$$

Quel est le comportement de $\Big(f(A) + f'(A)\Big)^2$ lorsque $A \to +\infty$? En déduire que la fonction J admet un minimum au point $\lambda\Psi$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer toutes les fonctions $f_0 \in E$ telles que $J(f_0) = \min_{f \in E} J(f)$

D. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la partie précédente, et pour tout $g \in L^2$, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \big(g(x)\big)^2 \mathrm{d}x}$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$,

$$\|f'\|^2 \leq 2\|f\| \cdot \|f''\|$$

On pourra poser $f_\mu(x) = f(\mu x)$ et utiliser le fait que $J(f\mu) \geq 0$, pour *tout* réel $\mu > 0$.

2. Déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.