À rendre pour le jeudi 14 septembre

DM NORMAL

Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1;+\infty[$.
On note $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.
Lorsque V est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, on rappelle que $V^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et que si n est un entier naturel non nul, $V^n = \underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{n}$.

Soit a un **réel strictement positif**.
Pour tout f de $\mathcal{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - ay + f = 0 \qquad (E_a^f)$$

et on note $\mathcal{S}_a^f$ l'ensemble de ses solutions sur I.

Partie 1

1. Étude de l'équation (E_a^f).

a. Soient $f \in \mathcal{E}$ et $z \in \mathcal{E}_1$.
Montrer que z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x \in I, \quad z(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right)$$

b. Prouver que s'il existe une solution de (E_a^f) qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.

c. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

d. Démontrer que la fonction $F : x \in I \mapsto e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_a^f) bornée sur I.

> On définit ainsi une application U_a de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à toute fonction f de $\mathcal{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.

e. Programmer en PYTHON une fonction `Z(f,a)` qui à une fonction $f \in \mathcal{E}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et renvoie la fonction $x \mapsto e^{-ax} f(x)$.

2. Étude de quelques propriétés de U_a.

a. Expliciter $U_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.

b. Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

c. i) L'endomorphisme U_a est-il injectif ?
ii) Montrer que pour tout f élément de $\mathcal{E}$, $U_a(f) \in \mathcal{E}_1$.
iii) L'endomorphisme U_a est-il surjectif ?

d. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que** $a = 1$.
Montrer que le sous-espace de $\mathcal{E}$: $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U_1 : $U_1(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.
Vérifier que $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$ en est une base de $\mathcal{F}$.
Écrire la matrice M de la restriction de U_1 à $\mathcal{F}$ dans cette base.

3. **On revient au cas général**.

a. Pour $r \in [0;+\infty[$, on note f_r la fonction de $\mathcal{E}$ définie par : $x \mapsto e^{-rx}$.
Déterminer $U_a(f_r)$.

b. Soit $\lambda \in \left]0;\dfrac{1}{a}\right]$. A-t-on $\operatorname{Ker}(U_a - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = \{0\}$?

c. Soit $x \in I$. Étudier la convergence de la suite $(U_a^n(f_r)(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

d. Soit $x \in I$. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)(x)$ et déterminer sa somme lorsqu'elle converge.

4. Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathcal{E}$:

$$\forall x \in I, \quad U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t$$

5. Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathcal{E}$ définie par : $g_k(x) = e^{-x}x^k$ et on note $G_k = U_a(g_k)$.
Pour tout entier naturel p, on note $\mathcal{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, \ldots, g_p)$.

a. Donner une base $\mathcal{B}_p$ de $\mathcal{F}_p$.

b. Vérifier que $\mathcal{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par U_a.

c. Calculer le déterminant de la restriction de U_a à $\mathcal{F}_p$.

6. Prouver que l'on a : $\forall\, f \in \mathcal{E},\ |U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

7. Soit f dans $\mathcal{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$?

8. Soit f dans $\mathcal{E}$ décroissante. Prouver que $aU_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

9. On note :
- $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ de classe C^1 sur I et tels que f' est bornée sur I.
- D l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}$.

Soit $f \in \mathcal{H}$.

a. Montrer que l'on a : $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$.

b. En déduire que U_a et D commutent dans $\mathcal{H}$.

10. Soit $f \in \mathcal{E}$. Vérifier que pour tout entier naturel n, $U_a^{n+1}(f)$ est la fonction $x \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$.
On pourra procéder par intégration par parties.

11. (Pour les 5/2 uniquement) Soit $f \in \mathcal{E}$.
On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $a > 1$.

a. Soient $x \in I$ et t un réel supérieur ou égal à x. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\right)$.

b. Soit $x \in I$. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_a^{n+1}(f)(x)$ converge. On notera $S(x)$ sa somme.
On pourra utiliser sans démonstration le résultat valable pour tout entier naturel n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\mathrm{d}u = n!$

c. Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $S = U_b(f)$.

Partie 2

On rappelle que :

si u et v sont deux fonctions continues sur I à valeurs réelles tels que v est à valeurs positives et $\displaystyle\int_1^{+\infty} v(t)\mathrm{d}t$ converge

$$\text{si } u = \underset{+\infty}{o}(v), \text{ alors } \int_x^{+\infty} u(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} v(t)\mathrm{d}t\right)$$

1. Soient f et g dans $\mathcal{E}$ avec g à valeurs positives et $f = \underset{+\infty}{o}(g)$. Montrer que $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$.

2. Soient f et g dans $\mathcal{E}$, g à valeurs positives telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Montrer que $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $U_a(f)$ admet aussi une limite finie en $+\infty$.
On pourra commencer par étudier le cas où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4. Pour tout réel strictement positif ω, on note pour toute la suite du problème, h_ω la fonction de $\mathcal{E}$ qui à $t \in I$ associe $\dfrac{1}{t^\omega}$ et $H_\omega = U_a(h_\omega)$.

a. Montrer que l'on a pour tout $x \in I$: $H_\omega(x) = \dfrac{h_\omega(x)}{a} - \dfrac{\omega}{a} H_{\omega+1}(x)$.

b. En déduire que : $H_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{h_\omega(x)}{a}$.

5. ***a.*** (Pour les 5/2, admis pour les 3/2) Montrer que pour tout $x \in I$:
$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k\cdot k!}(x^k - 1).$$

b. En déduire que l'on a : $H_1(x) = e^{ax}\left(-\ln x - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{a^k}{k\cdot k!}(x^k-1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t\right)$.

Partie 3

On reprend les fonctions f_r définies à la question **3.a.** de la partie **1** avec maintenant $\underline{r > 0}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t)\mathrm{d}t$ converge.

2. Pour les fonctions h_ω définies à la question **4** de la partie **2**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

3. Soit $f \in \mathcal{E}$, à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

On note $\varphi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, $F = U_a(f)$ et $\Phi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x F(t)\mathrm{d}t$.

a. Vérifier que l'on a pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) - a\Phi(x) + \varphi(x) - F(1) = 0$.

b. Prouver que $\varphi \in \mathcal{E}$.

c. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t$ converge.

4. Soit $f \in \mathcal{E}$ intégrable sur I.
Montrer que $U_a(f)$ est aussi intégrable sur I.

EXERCICE

Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si g est une fonction bornée sur I, on note $||g||_{\infty,I}$ (ou simplement $||g||_\infty$) la valeur

$$||g||_{\infty,I} = \sup_{x\in I} |g(x)|.$$

Si I est un intervalle ouvert, on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est à support compact dans I s'il existe $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$, tels que pour tout $x \in I \setminus [\alpha, \beta]$, $f(x) = 0$.

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^∞. On s'intéresse à des intégrales de la forme

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x)dx.$$

où λ est un paramètre réel strictement positif.
Dans toute la suite on fixe $\lambda > 0$.

1. *Cas d'une phase non stationnaire.* On suppose dans cette question que $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

a. On définit $L : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ et $M : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ par : pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$, tout $x \in [a, b]$,

$$Lg(x) = \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} g'(x), \quad Mg(x) = -\left(\frac{g}{i\varphi'}\right)'(x).$$

i. Déterminer les fonctions $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ telles que $Lg = g$.

ii. Soit $g, h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$. On suppose que h est à support compact dans $]a, b[$. Montrer que :

$$\int_a^b h(x)Lg(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_a^b g(x)Mh(x)dx.$$

b. Montrer que si f est à support compact dans $]a, b[$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante γ_N indépendante de λ telle que

$$|I(\lambda)| \leq \gamma_N \lambda^{-N}.$$

2. **a.** On suppose que $|\varphi'(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et que φ' est monotone sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$, indépendante de λ, φ et de a, b telle que

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq c_1\lambda^{-1}$$

Indication.On pourra écrire

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx = \int_a^b i\lambda\varphi'(x)e^{i\lambda\varphi(x)}\frac{1}{i\lambda\varphi'(x)}dx.$$

et intégrer par parties.

b. Soit $\delta > 0$. On suppose que $|\varphi'(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [a, b]$ et que φ' est monotone sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq c_1(\lambda\delta)^{-1}.$$

3. *Cas où la phase peut être stationnaire.* Dans toute cette question on suppose que $|\varphi''(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

a. Montrer que φ' est strictement monotone sur $[a,b]$ et qu'il existe un unique point $c \in [a,b]$ tel que $|\varphi'(c)| = \inf_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|$.

b. Si $x \in [a,b]$, montrer que $|\varphi'(x)| \geq |x-c|$.

c. Montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq 2c_1(\lambda\delta)^{-1} + 2\delta.$$

d. En déduire qu'il existe une constante c_2, indépendante de λ, φ, a et b telle que

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq c_2\lambda^{-1/2}.$$

e. Montrer que

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}f(x)dx\right| \leq c_2\lambda^{-1/2}\left(|f(b)| + \int_a^b |f'(x)|dx\right).$$

PROBLÈME

Partie 1

Dans cette partie, on utilisera à plusieurs reprises la fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{y-1}dt.$$

On admettra que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1. ***a.*** Montrer que Γ est bien définie et que : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ y\Gamma(y) = \Gamma(y+1)$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.

b. Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(y) = y^{-1}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^y dt$, puis que

$$\Gamma(y) = e^{-y}y^y\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)}ds,$$

où ϕ est la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $\phi(s) = s - \ln(1+s)$.

c. En reprenant la définition $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{y-1}dt$, tracer à l'aide de PYTHON la fonction Γ.

2. On considère dans cette question une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux vérifiant les deux propriétés suivantes :

i. il existe $K \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall t \in [1,+\infty[,\ |f(t)| \leq Ct^K$,

ii. il existe $N \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ et des réels $a_0, ..., a_N$ tels que :

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} a_k t^{(k+\lambda-\mu)/\mu} + o\left(t^{(N+\lambda-\mu)/\mu}\right).$$

On note $\rho_N(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{N} a_k t^{(k+\lambda-\mu)/\mu}$ le reste du développement asymptotique de f.

a. On fixe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto e^{-t/x} t^\alpha$ est intégrable sur $[\delta, +\infty[$ et que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-t/x} t^\alpha dt \underset{x \to 0+}{=} o(x^n).$$

En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-t/x} \rho_N(t) dt \underset{x \to 0+}{=} o(x^n).$$

b. On fixe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer l'existence de $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et d'une constante C' indépendante de ε et δ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \int_0^\delta e^{-t/x} t^\alpha dt \right| \leq C' \varepsilon x^{(N+\lambda)/\mu}.$$

c. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t/x} \rho_N(t) dt \underset{x \to 0+}{=} o(x^{(N+\lambda)/\mu}).$$

d. On note F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t/x} f(t) dt.$$

Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie la formule asymptotique suivante :

$$F(x) \underset{x \to 0^+}{=} \sum_{k=0}^N a_k \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) x^{\frac{k+\lambda}{\mu}} + o(x^{(N+\lambda)/\mu}).$$

3. On rappelle que la fonction ϕ a été définie à la question **1.b.**.

a. Tracer le graphe de ϕ. Montrer que ϕ définit par restriction aux intervalles $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$ respectivement :

- une bijection $\phi_- :]-1, 0[\to]0, +\infty[$,
- une bijection $\phi_+ :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$.

On notera $\phi_-^{-1} :]0, +\infty[\to]-1, 0[$ et $\phi_+^{-1} :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ les bijections réciproques.

b. Montrer que

$$\phi_+^{-1}(q) \underset{q \to 0^+}{=} \sqrt{2q} + \frac{2q}{3} + \frac{q^{3/2}}{9\sqrt{2}} + o(q^{3/2}) \quad \text{et} \quad (\phi_+^{-1})'(q) \underset{q \to 0^+}{=} \frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{q}).$$

On admet pour la suite que :

$$\phi_-^{-1}(q) \underset{q \to 0^+}{=} -\sqrt{2q} + \frac{2q}{3} - \frac{q^{3/2}}{9\sqrt{2}} + o(q^{3/2}) \quad \text{et} \quad (\phi_-^{-1})'(q) \underset{q \to 0^+}{=} -\frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{q}).$$

c. Montrer que : $\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_0^{+\infty} e^{-yq} \left((\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q) \right) dq.$

d. En déduire que :

$$\Gamma(y) \underset{y \to +\infty}{=} e^{-y} y^y \left(\frac{2\pi}{y}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12y} + o\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

Partie 2

On considère dans cette partie la fonction $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-1} dt.$$

On va voir qu'une série divergente peut être utile pour calculer une valeur approchée de F en un point particulier.

4. Montrer que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$r_N(x) = (-1)^N N! x^{N+1} e^{-1/x},$$

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} (k-1)! x^k e^{-1/x},$$

$$R_N(x) = (-1)^N N! \int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-(N+1)} dt.$$

5. Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = S_N(x) + R_N(x)$.

6. ***a.*** Montrer pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\lim\limits_{k \to +\infty} (k-1)! x^k = +\infty$.
Montrer que la suite $(R_N(x))_{N \geq 1}$ n'est pas bornée.

b. Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |R_N(x)| \leq |r_N(x)|$.
En déduire que $R_{N+1}(x) \underset{x \to 0}{=} o(r_N(x))$.

c. Montrer que le reste est de l'ordre du premier terme négligé, c'est-à-dire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ R_N(x) \underset{x \to 0}{\sim} r_N(x).$$

d. Montrer que pour x dans $]0, 1/2[$, la suite $(|r_N(x)|)_{N \geq 1}$ est décroissante jusqu'à un certain rang, puis croissante. (On ne demande pas de montrer cela pour la suite $(|R_N(x)|)_{N \geq 1}$.)

Quand on utilise $S_N(x)$ comme valeur approchée de $F(x)$, on dit que l'erreur relative est

$$E_N(x) = \left| \frac{R_N(x)}{F(x)} \right|.$$

7. ***a.*** Montrer que, si N est pair : $N = 2M$, avec $M \geq 1$, et si $0 < x \leq 1/N$, on a $S_N(x) \geq 0$ et

$$E_N(x) \leq \frac{N! x^{N+1}}{\sum_{\ell=0}^{M-1} (1 - (2\ell+1)x)\, (2\ell)! x^{2\ell+1}}.$$

b. Vérifier que $E_4\left(\frac{1}{10}\right) \leq 3.10^{-3}$.