À rendre pour le mardi 8 octobre

DM NORMAL

EXERCICE 1

On considère un entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1 = 3x^n \exp\left(-x^2\right) - 1$.

1. Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$? vers $+\infty$.

2. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n, qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

3. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

4. ***a.*** Quel est le signe de $f_{n+1}(u_n)$?

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. Soit l sa limite.

5. Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0, g_n(x) = \ln 3 + n \ln x - x^2$.

a. Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

b. On suppose que : $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?

c. Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2 w_n = u_n - 1$. Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.

EXERCICE 2

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?

3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, (a_n) désigne une suite de $(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont non nuls. On lui associe la suite (p_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$. Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite.

Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite.

PARTIE I

1. Donner un exemple de suite (a_n) ne comportant aucun terme nul, telle que (p_n) converge vers 0.

2. Montrer que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n > n_0,\ a_n > 0$.

On pose, pour n strictement supérieur à n_0, $q_n = \displaystyle\prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$.

a. Pour n strictement supérieur à n_0, exprimer q_n en fonction de p_n et p_{n_0}.

b. Montrer que, si la série $\sum_{n \geq n_0+1} \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.

c. On suppose dans cette question que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq n_0+1} \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans chacun de ces deux cas la limite de la suite (p_n).

Dans ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

4. On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a. Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

b. Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6. Prouver que, si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

PARTIE II

1. Étudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les deux cas suivants :

a. $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$; ***b.*** $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

2. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^n e^{-t^2}dt$. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3. Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1 + u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$.

On pose : $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + u_k)$ et $v_n = \dfrac{u_n}{p_n}$.

a. Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction de $\dfrac{1}{p_n}$ et de $\dfrac{1}{p_{n-1}}$.

b. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n^2$ converge.

i) Montrer que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier à l'aide d'un exemple vu avant.

c. Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge. Justifier à l'aide d'un exemple vu avant.

4. Soit α un réel strictement positif, et $a_n = 1 + \sin\left(\dfrac{c}{n^\alpha}\right)$ où c est un nombre réel tel que pour tout n, a_n soit non nul.

a. Montrer que (p_n) converge vers 0 si et seulement si $\alpha \leq 1$ et $c < 0$.

b. On pose $t_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum (t_{n+1} - t_n)$ converge. En déduire que la suite (t_n) converge vers un réel que l'on notera γ

c. On suppose que : $\alpha = 1$.

i) Montrer que si $c \geq 0$, alors la série $\sum p_n$ diverge.

ii) Si $c = -b$ avec b dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer que la suite $(\ln(p_n) + b\ln(n))$ converge en s'aidant de la suite (t_n). En déduire la convergence de la série $\sum p_n$.

d. Écrire une fonction PYTHON `p(n,a,c)` qui renvoie les n premiers termes de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ dans une liste, avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\sin\left(\frac{c}{n^a}\right)\right)$.

On prend $a = 5$. Représenter sur un même graphe les 100 premiers termes de la suite avec $c = 4$ et $c = -4$. Même question pour $a = 1$ et $a = 0.5$.

PARTIE III (Si vous avez fait tout le reste...)

Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but est d'étudier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que la suite (V_n) converge si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$ converge.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\geq 0}\frac{1}{p_k^j}\right) = \sum_{l=0}^{+\infty}\ \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_n=l}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}p_k^{j_k}}$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n \geq \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ (penser à la décomposition en facteurs premiers).

4. Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$?

5. Pour α dans $\mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k^{\alpha}}$?

EXERCICE 1

Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

On pourra écrire une somme double en introduisant une somme géométrique.

EXERCICE 2

À toute suite complexe a, on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

1. Soit a une suite réelle et q un entier naturel <u>fixé</u>.
On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

2. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$ (on pourra raisonner avec des ε).

3. On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

4. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

EXERCICE 3 (Facultatif)

Faire la partie III du problème du DM Normal.

PROLÈME DIFFICILE

Étant donnée une suite réelle (a_n), on associe à tout couple (u_0, u_1) de nombres réels la suite réelle (u_n) définie à partir de ses deux valeurs initiales u_0 et u_1 par la relation $(\mathcal{R})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + a_{n-1}u_{n-1}.$$

Partie I.Étude de la convergence de la suite (u_n)

1. On suppose dans les trois questions suivantes que la suite (a_n) est à termes positifs et que : $u_0 \geq 0$ et $u_1 > 0$.

- ***a.*** Étudier, pour $n \geq 1$, le sens de variation de la suite (u_n).
- ***b.*** Établir, pour $n \geq 2$, l'inégalité $u_{n+1} \leq u_n \exp(a_{n-1})$.
  En déduire que si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite (u_n) converge aussi.
- ***c.*** Établir réciproquement que si la suite (u_n) converge, alors la série $\sum a_n$ est convergente.

2. Dans les deux questions suivantes, on suppose que la série $\sum a_n$ converge absolument et on considère la suite (v_n) définie par $v_0 = |u_0|$, $v_1 = |u_1|$ et, pour $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}|v_{n-1}$.

- ***a.*** Comparer $|u_n|$ et v_n.
- ***b.*** Étudier la convergence absolue de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et la convergence de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a^n$, avec a un réel dans $]0,1[$, et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle. Déterminer un équivalent de $u_{k+1} - u_k$ et en déduire un équivalent de $L - u_n$.

4. Dans les trois questions suivantes, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle.

a. Prouver que $L - u_n \sim \dfrac{L}{n}$.

b. On définit la suite (ε_n) en posant pour $n \geq 1$: $u_n = L - \dfrac{L}{n} + \varepsilon_n$.

Montrer que $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \sim -\dfrac{L}{n(n+1)(n+2)}$, puis trouver un équivalent de ε_n, et en déduire le développement asymptotique à l'ordre 2 de u_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$.

c. Écrire une fonction PYTHON `u(n,a,b)` qui renvoie les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans une liste, avec $u_0 = a$ et $u_1 = b$. En prenant $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et en calculant les 1000 premiers termes de la suite, estimer L à 10^{-2} près. Représenter sur un graphique les termes de cette suite.

Partie II. Étude des suites (u_n) de limite nulle

Dans cette partie, on suppose les a_n strictement positifs pour tout n de $\mathbb{N}$ et la série $\sum a_n$ convergente. Toute suite (u_n) de premier termes u_0 et u_1, et définie par la relation $(\mathcal{R})$ est donc convergente. On note $L(u_0, u_1)$ sa limite (qui existe grâce à la question **I.2.b.**).

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \dfrac{a_n}{1+x} \end{array} \right.$$

et $g_n = f_0 \circ f_1 \circ ... \circ f_n$ et on pose $p_n = g_n(0)$.

1. Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m = 0$, alors $L(u_0, u_1)$ est non nul.

2. On dira que la suite (u_n) est alternée si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n u_{n+1} < 0$. Montrer que $L(u_0, u_1) = 0$ si et seulement si la suite (u_n) est alternée.

3. On suppose dans les trois questions suivantes que $L(u_0, u_1) = 0$, donc que la suite est alternée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $r_n = -\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = -1 + \dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$ et $0 < r_n < a_n$.

b. En déduire que la suite (r_n) converge vers une limite que l'on précisera.

c. Étudier enfin a convergence des séries $\sum r_n$, $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$.

4. Montrer que f_n et g_n sont monotones, dérivables, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |g_n'(x)| \leq a_0 a_1 ... a_n.$$

En déduire que, : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 ... a_n$.

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, r_0 est compris entre p_{n-1} et p_n (on pourra comparer $g_{n-1}(r_{n-1})$, $g_{n-1}(a_n)$ et $g_{n-1}(0)$).
En déduire que r_0 est limite de (p_n).