À rendre pour le jeudi 17 octobre

## DM NORMAL

### EXERCICE 1

Soit $x$ un réel et $n$ un entier naturel non nul. On note $u_n(x)$ le déterminant d'ordre $n$ :

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

***1.*** Calculer $u_1(x)$, $u_2(x)$ et $u_3(x)$.

***2.*** Montrer que $\forall n > 2,\ u_n(x) = 2xu_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)$. En déduire que $u_n(X)$ est un polynôme de degré $n$ dont on précisera le coefficient dominant.

***3.*** Écrire en PYTHON une fonction qui permet de calculer $u_n(x)$, pour $n$ dans $\mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

***4.*** En déduire l'expression de $u_n(x)$ en fonction de $x$ lorsque $|x| > 1$. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, simplifier $u_n(\operatorname{ch}\theta)$.

***5.*** Donner la valeur de $u_n(1)$ et $u_n(-1)$.

***6.*** On suppose $|x| < 1$, soit $\theta = \operatorname{Arccos} x$. Montrer que : $u_n(x) = \dfrac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$.

***7.*** En déduire les racines du polynôme $u_n(X)$.

### EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = \left(1, X, \dots, X^{n-1}\right)$ sa base canonique.
Soient $a_1, \dots, a_n$, $n$ réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

***1.*** Montrer que l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $E$ dans $\mathbb{R}^n$.

***2.*** On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par $T$ est $e_i$. Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de $E$ puis déterminer les composantes d'un polynôme $P$ quelconque de $E$ dans cette base.
On note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$

***3.*** **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

- ***a.*** Donner, sans justification, les polynômes $L_1$, $L_2$, $L_3$ et expliciter la matrice $M$.
- ***b.*** Dt́erminer $\operatorname{Ker}(M - I_3)$.
- ***c.*** En déduire tous les polynômes $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.

***4.*** **On revient au cas général**.

**a.** Montrer que $M$ est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question 2)

**b.** Etablir la relation : $\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

**c.** Montrer que l'on a : $\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.

**d.** Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de $M$.

**5.** Dans cette question, on suppose que $n \geq 4$ et soit $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$\forall P \in E, u(P) = Q \qquad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$$

avec $L_1, L_2$ et $L_3$ les polynômes de la question 3.a.

**a.** Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$ et $Im(u)$. Sont-ils supplémentaires ?

**b.** Montrer que $u$ est un projecteur.

**PROBLÈME**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de $A$ lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$AA' = A'A \tag{1}$$

$$A = AA'A \tag{2}$$

$$A' = A'AA' \tag{3}$$

On dira qu'une matrice est pseudo-inversible si elle admet un pseudo-inverse.

## Partie I : Préliminaires

## Partie I : Unicité du pseudo-inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on suppose que $A'_1$ et $A'_2$ sont deux pseudo-inverses de $A$.

**1.** En calculant le produit $AA'_1AA'_2$ de deux manière différentes, montrer que : $A'_1A = AA'_2$.

**2.** En déduire que $A'_1 = A'_2$.

Ainsi une matrice admet au plus un pseudo-inverse.

## Partie II : Exemples

**3.** Montrer que toute matrice inversible est pseudo-inversible et déterminer son pseudo-inverse.

**4.** Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $p$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$. On suppose que $N$ est pseudo inversible de pseudo-inverse $N'$.

**a.** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ N'N^k = N^{k-1}$.

**b.** En déduire que $N$ est la matrice nulle, c'est-à-dire $p = 1$.

**5.** La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est-elle pseudo-inversible et si oui quelle est son pseudo-inverse ?

## Partie III : Existence du pseudo-inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ admette un pseudo-inverse.

***6.*** On suppose que $A$ admet un pseudo inverse $A'$. Soient $a$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ et $a'$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A'$.

- ***a.*** Montrer que : $a' \circ a \circ a = a$.
- ***b.*** Montrer que $\mathrm{Im}\,(a) \cap \mathrm{Ker}\,(a) = \{0\}$, puis que $\mathrm{Im}\,(a) \oplus \mathrm{Ker}\,(a) = \mathbb{R}^n$
- ***c.*** Montrer que : $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^2)$.

***7.*** Réciproquement, on suppose maintenant que : $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^2) = r$.

- ***a.*** Montrer que : $\mathrm{Im}\,(a) \oplus \mathrm{Ker}\,(a) = \mathbb{R}^n$.
- ***b.*** En effectuant un changement de base dans une base adpatée à $\mathrm{Im}\,(a) \oplus \mathrm{Ker}\,(a) = \mathbb{R}^n$, en déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, avec $B$ inversible et $W \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, avec $W$ inversible, telles que
$$A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$
- ***c.*** En déduire que $A$ admet un pseudo-inverse.

## Partie IV : Application aux systèmes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ admet un pseudo inverse $A'$. Soient $a$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ et $a'$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A'$.

***8.*** Montrer que $aa'$ est la projection sur $\mathrm{Im}\,(a)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(a)$.

***9.*** Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ On considère le système $AX = Y$, où l'inconnue est $X$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- ***a.*** Montrer que l'égalité $AA'Y = Y$ est une condition nécessaire et suffisante pour que le système admette au moins une solution.
- ***b.*** Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à $I_n - AA'$ est la projection sur $\mathrm{Ker}\,(a)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(a)$.
- ***c.*** Démontrer que, lorsque $AA'Y = Y$, l'ensemble des solutions du système est $\{A'Y + (I_n - AA')U,\ U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$. Quelle est la structure de cet ensemble ?

Dans ce problème $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :

- $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices réelles triangulaires supérieures.
- $\mathcal{L}_n$ l'ensembles des matrices réelles triangulaires inférieures ayant des coefficients diagonaux égaux à 1.

Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $i$ dans $[\![1, n]\!]$, on note $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{M}_i(\mathbb{R})$.

***1.*** ***a.*** Montrer que si une matrice inversible $A$ est dans $T_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement dans $T_n^-(\mathbb{R})$), alors $A^{-1}$ reste dans $T_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement dans $T_n^-(\mathbb{R})$).

***b.*** Montrer que $\mathcal{L}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

***2.*** Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

***a.*** Montrer que si $A$ est inversible, alors il existe au plus un couple $(L, U)$ de $\mathcal{L}_n \times \mathcal{U}_n$ tel que l'on ait : $A = LU$.

Lorsqu'une telle décomposition est possible, on dit que $A$ admet une décomposition $LU$.

***b.*** Montrer que si $A$ est inversible et possède une décomposition $LU$, alors pour tout $k$ de $[\![1, n]\!]$, on a : $\det(A_k) \neq 0$ (on pourra utiliser une décomposition par blocs de $A$).

***c.*** On suppose que : $\det(A_{n-1}) \neq 0$ et on écrit $A$ par blocs sous la forme : $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & a_{nn} \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe $H$ dans $\mathcal{L}_n$ telle que tous les coefficients en position $(n, i)$ de $HA$ soient nuls, pour $i$ dans $[\![1, n-1]\!]$.
En posant à priori $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix}$, expliciter une telle matrice $H$ ainsi que son inverse (on explicitera les blocs $H_{n-1}$ et $H'$, ainsi que les blocs correspondant à $H^{-1}$ en fonctions des blocs de la matrice $A$).

***d.*** Montrer que si pour tout $k$ de $[\![1, n]\!]$, $\det(A_k)$ est non nul, alors $A$ possède une décomposition $LU$ (on pourra raisonner par récurrence en utilisant une décomposition par blocs de $A$).

***3.*** ***a.*** Soit $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $p < q$. Montrer que l'opération élémentaire qui consiste à échanger les lignes $p$ et $q$ d'une matrice réelle correspond à la multiplication à gauche par une matrice réelle que l'on déterminera.

***b.*** Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$. On désine par $\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}_A$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$. Par exemple : $\det(A_i) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & i \\ 1 & 2 & \cdots & i \end{bmatrix}_A$.
Sous les hypothèses de la question **2.d)** et en notant $A = LU$ la décomposition de $LU$ de $A$, trouver dans l'ordre :

1. la première ligne de $U$,
2. la première colonne de $L$,
3. les éléments diagonaux de $U$,
4. les éléments de $L$ des colonnes $2, 3, ..., n$ (on utilisera la question **3.a)** sous la forme $PA = PLU$ où $P$ est une matrice telle que la multiplication de $M$ par $P$ à gauche permute deux lignes de $M$),
5. les éléments de $U$ des lignes $2, 3, ..., n$.
   On montrera que si $L = [l_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ et $U = [u_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$, alors pour $2 \leq j \leq i \leq n$, on a : $l_{ij} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & j \\ 1 & 2 & \cdots & j \end{bmatrix}_A}$ et on donnera le même type de formule pour $u_{ij}$ avec : $2 \leq i \leq j \leq n$.

***4.*** À l'aide de l'algorithme de la question **3.b)**, écrire un algorithme en PYTHON donnant la décomposition $LU$ d'une matrice (on supposera que la fonction déterminant est connue en Python et qu'elle se nomme det).

***5.*** ***a.*** Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On veut résoudre le système $AX = Y$ et on suppose que pour tout $k$ de $[\![1, n]\!]$, on a : $\det(A_k) \neq 0$. En utilisant la factorisation $LU$, montrer qu'il suffit de $n(n-1)$ multiplications pour résoudre le système $AX = Y$ (on ne tiendra pas compte des opérations nécéssaires pour effectuer la factorisation $LU$).

***b.*** En déduire une méthode pour inverser la matrice $A$ un utilisant la factorisation $LU$.
On admet que l'on peut trouver un algorithme permettant d'obtenir la factorisation $LU$ avec $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ multiplications. Exprimer le nombre total de multiplications nécéssaires à cette inversion, incluant cette fois-ci la factorisation $LU$. En admettant que le nombre $r_n$ de divisions dans la méthode précédent vérifie $r_n = O(n^2)$, donner un équivalent du nombre de mutliplications/divisions nécéssaires pour la résolution du système $AX = Y$ avec cette méthode lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

***c.*** Appliquer cet algorithme pour résoudre à la main le système : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 3z & + & t & = & a \\ x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & b \\ & & y & - & z & + & 2t & = & c \\ x & - & y & + & 2z & + & t & = & d \end{array}\right.$,

avec $a, b, c, d$ des réels fixés.

***6.*** On rappelle la convention $\dbinom{p}{q} = 0$, si $p < q$ ou $p < 0$ ou $q < 0$.

***a.*** Soient $p, q, r$ des entiers naturels. Montrer que $\dbinom{p+q}{r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dbinom{k}{p}\dbinom{r-k}{q}$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

***b.*** Soit $p \in \mathbb{N}$ ; déterminer la décomposition $LU$ de la matrice $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{i,j} = \dbinom{p+j-1}{i-1}$. En déduire $\det(A)$.
Écrire $A, L, U$ lorsque $p = 1$ et $n = 4$.

**7.** Soit $A$ une matrice tridiagonale : $A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$.

**a.** On pose $\delta_k = \det(A_k)$. On suppose que pour tout $k$ de $[\![1, n]\!]$, on a : $\delta_k \neq 0$. Calculer $\delta_1$ puis, pour $k$ dans $[\![2, n]\!]$, montrer que $\delta_h = b_k\delta_{k-1} - c_{k-1}a_k\delta_{k-2}$.

**b.** Montrer que les matrices $L$ et $U$ de la factorisation $LU$ de $A$ sont de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & 0 & \\ & l_{32} & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & l_{n-1n-2} & 1 & \\ & & & & & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & c_{n-1} \\ & & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix},$$

avec pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$ la relation : $l_{i,i-1} = a_i \dfrac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}$.

**8.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**a.** i. Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \ddots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$V^T A_n V = v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (v_i - v_{i-1})^2.$$

ii. En déduire que $A_n$ est inversible.
iii. Montrer (sans l'expliciter) que $A_n$ admet une factorisation $A_n = L_n U_n$.

**b.** On reprend les notations de la question **7.**. Expliciter et résoudre la relation de récurrence sur $\delta_k$. En déduire l'expression des matrices $L_n$ et $U_n$.

**c.** On veut résoudre le système $A_n X = E_k$, avec $E_k$ le $k$-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
i. Résoudre le système $L_n Y = E_k$.
ii. Résoudre le système $U_n X = Y$.
*(On montrera que $x_i = \dfrac{i(n+1-k)}{n+1}$, si $i \leq k$ et $x_i = \dfrac{k(n+1-i)}{n+1}$, si $i \geq k$).*

**d.** On pose $A_n^{-1} = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$. Excpliciter les coefficients $b_{i,j}$, pour $i, j$ dans $[\![1, n]\!]$.