À rendre pour le mercredi 6 novembre

EXERCICE COMMUN À TOUS

1. Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.

On n'utilisera pas de fonction spécifique de python déterminant ce maximum.

2. Écrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices `[i_1,...,i_r]` avec `i_1<...<i_r` telle que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, `L[i_k]` soit non nul.

Par exemple si `L = [0,1,3,0,7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1,2,4]`.

3. Écrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur `M = maxi(L)+1` où, pour tout $i \in [\![0, M]\!]$, `T[i]` est le nombre d'occurrences de l'entier `i` dans la liste `L`.

Par exemple, si `L = [3,1,4,1,5]`, alors `T = [0,2,0,1,1,1]`.

On pourra utiliser la fonction `maxi`.

4. Soit `L` une liste d'entiers naturels.

a. Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.

b. On veut que ce nombre `n` soit indépendant de `M = maxi(L)+1`.
Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

5. Soit A une liste d'entiers naturels. On définit la suite de Robinson $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la suite A par récurrence comme suit :

- $L_0 = A$.
- Si L_n est construite, alors :
  — on détermine $T_n = \texttt{nb\_oc}(L_n)$.
  — on détermine $I_n = \texttt{ind}(T_n)$.
  — si $I_n = [i_1, \ldots, i_r]$, alors $L_{n+1} = \big[T[i_r], i_r, \ldots, T[i_1], i_1\big]$.

Par exemple si $A = [4, 4, 1, 2]$, alors :

- $L_0 = [4, 4, 1, 2]$
- $L_1 = [2, 4, 1, 2, 1, 1]$ (il y a deux « 4 », un « 2 » et un « 1 » dans la liste L_0)
- $L_2 = [1, 4, 2, 2, 3, 1]$ (il y a un « 4 », deux « 2 » et trois « 1 » dans la liste L_1)

a. On donne $A = [2, 0, 4, 1, 3, 3, 2, 3, 1, 1]$. Déterminer L_3 et L_{2018}.

b. On donne $B = [2, 4, 1, 1, 1, 2]$. Si l'on suppose que $L_1 = B$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

c. On donne $C = [2, 4, 1, 0]$. Si l'on suppose que $L_1 = C$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

d. Proposer alors une fonction `rob(A,n)` qui prend en arguments une liste d'entiers naturels `A` et un entier naturel `n` et qui renvoie l'élément L_n de la suite de Robinson associée à `A`.

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables.
Étant donné un entier $s \in \mathbb{N}$ et une fonction φ, on utilise la notation $\varphi(t) = O(t^s)$ lorsque $t \longrightarrow 0$, qui signifie que le quotient $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{t^s}$ est borné au voisinage de 0.
t_n étant le terme général d'une suite qui ne s'annule pas et qui tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on note $u_n = O(t_n)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, le terme général d'une suite telle que le quotient $\dfrac{u_n}{t_n}$ est borné lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
La deuxième partie est indépendante de la première partie.

PREMIÈRE PARTIE

On désigne par A une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et on suppose que A admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.
On note $A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k + O(t^{k+1})$ son développement limité à l'ordre k au voisinage de 0, les coefficients a_p étant des réels.

1. ***a.*** Étant donné un réel ρ non nul et un entier $s \in \mathbb{N}$, on suppose que φ est une fonction qui vérifie $\varphi(t) = O\big((\rho t)^s\big)$ lorsque $t \longrightarrow 0$. Montrer que $\varphi(t) = O(t^s)$ lorsque $t \longrightarrow 0$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\varphi(t) = O(t^k)$ lorsque $t \longrightarrow 0$. Déterminer la limite lorsque $t \longrightarrow 0$, $t \neq 0$, du quotient $\dfrac{\varphi(t)}{t^{k-1}}$.

2. ***a.*** Montrer que $A(t)$ admet une limite lorsque $t \longrightarrow 0$ et déterminer cette limite.

Soit r un réel vérifiant $r > 1$. On définit la suite de fonctions A_n par :
pour t réel, $A_0(t) = A(t)$ puis, pour t réel et $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n(t) = \dfrac{r^n A_{n-1}(t) - A_{n-1}(rt)}{r^n - 1}$.

b. Montrer qu'il existe un réel $a_{1,2}$, que l'on déterminera, tel que le développement limité de A_1 à l'ordre k au voisinage de 0 soit $A_1(t) = a_0 + a_{1,2}t^2 + \cdots + O(t^{k+1})$.

c. En déduire qu'il existe un réel $a_{n,n+1}$, que l'on ne demande pas de déterminer, tel que le développement limité de A_n à l'ordre k au voisinage de 0 soit
$A_n(t) = a_0 + a_{n,n+1}t^{n+1} + \cdots + O(t^{k+1})$.

d. Soit t_0 un réel non nul fixé. Montrer que la suite de terme général $A(r^{-m}t_0)$ converge vers a_0 lorsque $m \longrightarrow +\infty$.

Dans la suite de la première partie, on suppose que pour tout $t_0 \neq 0$ fixé et $r > 1$ fixé, on sait calculer les premiers termes $A(t_0)$, $A(r^{-1}t_0)$, ..., $A(r^{-m}t_0)$ de la suite.
Le procédé de Richardson consiste à extrapoler ces valeurs pour obtenir, grâce à un procédé d'accélération de convergence, la valeur de a_0.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $A_{p,0} = A_0(r^{-p}t_0)$ puis, pour q entier vérifiant $1 \leq q \leq p$, on note $A_{p,q} = A_q(r^{-p}t_0)$.

3. ***a.*** Justifier l'égalité $A_{p,0} = a_0 + O(r^{-p})$ lorsque $p \longrightarrow +\infty$.

b. Déterminer un entier naturel $\alpha(p,q) > 0$, que l'on explicitera, tel que $A_{p,q} = a_0 + O(r^{-\alpha(p,q)})$ lorsque $p \longrightarrow +\infty$.

c. Pour $p \geq 1$, justifier l'égalité : $A_{p,1} = \dfrac{rA_{p,0} - A_{p-1,0}}{r-1}$.

d. Pour $1 \leq q \leq p$, justifier l'égalité :

$$A_{p,q} = \frac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = A_{p,q-1} + \frac{1}{r^q - 1}\big(A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}\big).$$

Dans la pratique, on range les valeurs $A_{p,q}$ pour $0 \leq q \leq p \leq m$ dans un tableau triangulaire :

$$\begin{array}{lllll} A_{0,0} & & & & \\ A_{1,0} & A_{1,1} & & & \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{m,0} & A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} \end{array}.$$

4. Déterminer la plus petite valeur et la plus grande valeur de $\alpha(p,q)$ pour $0 \leq q \leq p \leq m$.
Lorsque $m \longrightarrow +\infty$, de laquelle des valeurs $A_{p,q}$ du tableau peut-on attendre la meilleure approximation de a_0 (on pourra utiliser **I-1.b.** pour justifier la réponse) ?
On écrira cette valeur sous la forme $a_0 + O(r^{-\sigma(m)})$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$ et on précisera la valeur de l'entier $\sigma(m) > 0$.

On considère une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on note $g(\alpha + h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_{2k} h^{2k} + O(h^{2k+1})$ son développement limité à l'ordre $2k$ au voisinage de α.

5. ***a.*** Exprimer les coefficients c_p pour $0 \leq p \leq 2k$, en fonction de g et de ses dérivées successives.

Pour $h \neq 0$, on note $G(h) = \dfrac{g(\alpha+h) - g(\alpha-h)}{2h}$.

b. Montrer que la fonction G est paire.
Montrer que G se prolonge par continuité en 0 par une valeur que l'on déterminera.
On note $\widetilde{G}$ la fonction G prolongée en 0 par cette valeur.

c. Exprimer à l'aide des coefficients c_p le développement limité de $\widetilde{G}$ à l'ordre $2k-1$ au voisinage de 0.

Pour t réel positif, on note $A(t) = \widetilde{G}(\sqrt{t})$.

6. ***a.*** On choisit $h > 0$ et on considère la suite de valeurs $G(h)$, $G\left(\dfrac{h}{2}\right)$, ..., $G\left(\dfrac{h}{2^m}\right)$.

Déterminer un réel $t_0 > 0$ et un réel $r > 1$ tels que cette suite de valeurs soit $A(t_0)$, $A(r^{-1}t_0)$, ..., $A(r^{-m}t_0)$.

On utilise les notations des questions précédentes avec $A_0(t) = A(t)$, $A_{p,0} = A_0(r^{-p}t_0)$ puis $A_{p,q}$, pour les valeurs r et t_0 déterminées dans **I-6.a.**.

b. Quelle est la limite ℓ de $A_{p,0}$ lorsque $p \longrightarrow +\infty$? On exprimera ℓ à l'aide de la fonction g et de α.

Dans ce qui suit, on prend $g(x) = \ln x$, $\alpha = 3$ et $h = 0,8$.

7. ***a.*** Calculer les valeurs $A_{p,0}$ pour $0 \leq p \leq 3$.
Donner le tableau des valeurs $A_{p,q}$ pour $0 \leq q \leq p \leq 3$. On s'aidera d'un programme en PYTHON.

b. Quelle est la valeur exacte de ℓ ?
Parmi les valeurs $A_{p,q}$ trouvées, quelle est la meilleure approximation de ℓ ?

DEUXIÈME PARTIE

Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite B_p de polynômes par :

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B_0(t) = 1$

(ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $B_p'(t) = pB_{p-1}(t)$ et $\displaystyle\int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t = 0$,

et on note $b_p = B_p(0)$.

1. ***a.*** Déterminer les polynômes B_1, B_2, B_3.

b. Pour $0 \leq p \leq 3$, calculer b_p et comparer b_p à $B_p(1)$.

c. Montrer que pour $p \geq 2$, on a $b_p = B_p(1)$.

2. ***a.*** Pour $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit $\widetilde{B}_p(t) = (-1)^p B_p(1-t)$.
Montrer que la suite de polynômes $\widetilde{B}_p$ vérifie les relations (i) et (ii). En déduire que $\widetilde{B}_p = B_p$.

b. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $b_{2p+1} = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$; on note $f^{(p)}$ la dérivée d'ordre p de la fonction f.

3. ***a.*** Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 B_0(t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \int_0^1 B_1(t)f'(t)\mathrm{d}t$.

b. Pour $n \geq 2$, montrer l'égalité (on pourra procéder par récurrence) :

$$\frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\sum_{p=2}^{n}(-1)^p\frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(1)-f^{(p-1)}(0)\big)+(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

c. En déduire que pour $n = 2k$ on a l'égalité :

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(1)-f^{(2p-1)}(0)\big)-\int_0^1 \frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}f^{(2k)}(t)\mathrm{d}t.$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\mathcal{D}_p$ par : pour $t \in \mathbb{R}$, $D_p(t) = B_p\big(t - \lfloor t \rfloor\big)$.

4. ***a.*** Montrer que D_p est une fonction périodique de période 1.
Montrer que D_p est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite la fonction f appartient à $\mathcal{C}^\infty\big([0,N],\mathbb{R}\big)$ où $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$.
Pour q entier vérifiant $1 \leq q \leq N$, on définit les fonctions f_q de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par
$f_q(t) = f(t+q-1)$.

b. Montrer que les fonction f_q appartiennent à $\mathcal{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et qu'elles vérifient les égalités :
pour $m \in \mathbb{N}$ et q entier tel que $2 \leq q \leq N$,

$$f_1^{(m)}(0) = f^{(m)}(0), \quad f_q^{(m)}(0) = f_{q-1}^{(m)}(1), \quad f_N^{(m)}(1) = f^{(m)}(N).$$

c. En appliquant (1) aux fonction f_q, en déduire la formule d'Euler-Mac Laurin sur $[0,N]$:

$$(2) \qquad \frac{1}{2}f(0)+\sum_{q=1}^{N-1}f(q)+\frac{1}{2}f(N) = \int_0^N f(t)\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(N)-f^{(2p-1)}(0)\big)-\int_0^N \frac{D_{2k}(t)}{(2k)!}f^{(2k)}(t)\mathrm{d}t.$$

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie on note $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathcal{C}^\infty\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

Étant donné $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \dfrac{b-a}{N}$, on note :

$T_f(h) = h\left[\dfrac{1}{2}f(a) + \displaystyle\sum_{q=1}^{N-1} f(a+qh) + \dfrac{1}{2}f(b)\right]$ si $N \geq 2$, $T_f(h) = h\left[\dfrac{1}{2}f(a) + \dfrac{1}{2}f(b)\right]$ si $N = 1$, la valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ obtenue par la méthode des trapèzes pour le pas h.

1. On suppose $N \geq 2$. En appliquant la formule (2) à la fonction $g : t \mapsto f(a+th)$ définie sur $[0,N]$, montrer la formule :

$$(3) \qquad T_f(h) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^{k} h^{2p}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\big) - h^{2k}\int_a^b \frac{D_{2k}\left(\frac{t-a}{h}\right)}{(2k)!} f^{(2k)}(t)\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que la formule (3) peut s'écrire : (4) $\qquad T_f(h) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^{k-1} d_p h^{2p} + O(h^{2k})$ où les d_p désignent des nombres réels.

Pour $t > 0$, on définit $A(t) = T_f(\sqrt{t})$.

3. ***a.*** Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} A(t)$.

b. On prend $N = 1$ et donc $h = b - a$, et on calcule la suite de valeurs $T_f(h)$, $T_f\left(\dfrac{h}{2}\right)$, …, $T_f\left(\dfrac{h}{2^m}\right)$.

Déterminer un réel $t_0 > 0$ et un réel $r > 1$ tels que cette suite de valeurs soit $A(t_0)$, $A(r^{-1}t_0)$, …, $A(r^{-m}t_0)$.

On utilise les notations de la première partie avec $A_0(t) = A(t)$, $A_{p,0} = A_0(r^{-p}t_0)$ puis, $A_{p,q}$, t_0 et r étant les valeurs trouvées en **III-3.b.**. On note $h_p = \dfrac{b-a}{2^p}$.

4. ***a.*** Exprimer $A_{p,0}$ et $A_{p-1,0}$ à l'aide de T_f et de h_p.

b. Pour $p \geq 1$, on définit $A'_{p,0} = h_p \sum f\big(a + (2q+1)h_p\big)$, la somme étant étendue aux entiers q tels que $a < a + (2q+1)h_p < b$.

Exprimer $A_{p,0}$ en fonction de $A_{p-1,0}$ et $A'_{p,0}$. Quel est l'intérêt de cette expression ?

5. ***a.*** On choisit $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \neq 0$, $f(0) = 1$, $a = 0$, $b = \pi$, $h = b - a = \pi$.

b. (Admis pour les 3/2) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$.

c. Calculer les valeurs $A_{p,0}$ pour $0 \leq p \leq 3$ et les valeurs $A'_{p,0}$ pour $1 \leq p \leq 3$.

Indiquer dans quel ordre vous calculez ces sept valeurs.

d. Donner le tableau des valeurs $A_{p,q}$ pour $0 \leq q \leq p \leq 3$.

De laquelle de ces valeurs peut-on attendre la meilleure approximation de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$?

6. Que donne cette méthode lorsque f est une fonction périodique de période $b - a$?

I-Étude de l'inversibilité d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1;2\}$. On pose $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On pose $B_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $c_0 = 1$ et $c_1 = 4$ et pour n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $c_n = \det(C_n)$ et $b_n = \det(B_n)$ et enfin pour n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1;2\}$, on pose $a_n = \det(A_n)$.

- ***a.*** Expliciter les termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ***b.*** Expliciter les termes de la suite $(b_n)_{n\geq 2}$.
- ***c.*** Expliciter les termes de la suite $(a_n)_{n\geq 3}$.
- ***d.*** En déduire que A_n est inversible pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1;2\}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1;2\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $Y = AX$ et on note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

- ***a.*** Soit $r = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$ et $m = \max\{|y_1|, |y_2|, ..., |y_n|\}$.
  Montrer que : $r \leq m$.
- ***b.*** En déduire que A_n est inversible.

3. On rappelle qu'une transvection sur les lignes est l'opération élémentaire sur une matrice qui consiste à ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire, c'est-à-dire on effectue $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, avec $i \neq j$ et α dans $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1;2\}$

- ***a.*** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}.$$

  Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ***b.*** Montrer qu'en effectuant que des transvections sur les lignes de la matrice A_n à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, on obtient une matrice triangulaire supérieure dont les n pivots $(p_0, p_1, ..., p_{n-1})$ vérifient :

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall k \in [\![0, n-3]\!],\ p_{k+1} = 4 - \dfrac{1}{p_k} \\ p_{n-1} = 2 - \dfrac{1}{p_{n-2}} \end{cases}.$$

- ***c.*** En déduire que A_n est inversible.

II-Splines cubiques

Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. On note $P^3([\alpha, \beta])$ l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $[\alpha, \beta]$ de degré inférieur ou égal à 3.

Soit $[a, b]$, avec $a < b$, un intervalle réel que l'on divise en n intervalles égaux de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et pour k dans $[\![0, n]\!]$, on pose $x_k = a + kb$ (ainsi $x_0 = a$ et $x_n = b$).

Soit $f \in \mathcal{C}^4([a, b], \mathbb{R})$ et pour k dans $[\![0, n]\!]$, on pose

$$f_k = f(x_k); \qquad f'_k = f'(x_k) \qquad f''_k = f''(x_k).$$

On se propose de déterminer une fonction g définie sur $[a, b]$ satisfaisant les conditions suivantes :

C1 : pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, la restriction de g à $[x_k; x_{k+1}]$, c'est-à-dire $g|_{[x_k;x_{k+1}]}$ est dans $P^3([x_k; x_{k+1}])$. Autrement dit pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, il existe une fonction polynôme P_k de degré au plus 3 telle que : $g|_{[x_k;x_{k+1}]} = P_k$.

$$\textbf{C2} : g \text{ vérifie les relations suivantes : } \begin{cases} \forall k \in [\![0, n]\!],\ g(x_k) = f_k \\ g'_d(x_0) = f'_0 \ \text{ (dérivée à droite en } x_0) \\ g'_g(x_n) = f'_n \ \text{ (dérivée à gauche en } x_n) \end{cases}$$

1. Soit une g fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant **C1** et **C2**. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si

1. $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P_k(x_k) = P_{k-1}(x_k)$.
2. $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P'_k(x_k) = P'_{k-1}(x_k)$.
3. $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P''_k(x_k) = P''_{k-1}(x_k)$.
4. $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P_k(x_k) = f_k$.
5. $P'_0(x_0) = f'_0$.
6. $P'_{n-1}(x_n) = f'_n$.

2. Soit une g fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant **C1** et **C2**. Montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, les fonctions polynômes P_k intervenant dans la condition **C1** s'écrivent :

$$P_k = m_k \frac{(x_{k+1} - X)^3}{6h} + m_{k+1} \frac{(X - x_k)^3}{6h} + \alpha_k (X - x_k) + \beta_k,$$

avec $m_l = g''(x_l)$ (pour l dans $[\![0, n]\!]$) et $\alpha_k = \dfrac{f_{k+1} - f_k}{h} + \dfrac{m_k - m_{k+1}}{6} h$ et $\beta_k = f_k - \dfrac{m_k h^2}{6}$.

3. Soit une g fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant **C1** et **C2**. En reprenant la notation $m_l = g''(x_l)$ (pour l dans $[\![0, n]\!]$) , montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $A_{n+1} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$,

avec $d_0 = \dfrac{6}{h^2}[f_1 - f_0 - hf'_0]$; $d_n = \dfrac{6}{h^2}[hf'_n - f_n + f_{n-1}]$ et pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, $d_k = \dfrac{6}{h^2}[f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}]$.

4. Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $[a, b]$ vérifiant **C1** et **C2** et de classe $\mathcal{C}^2$.

Dans la question précédente, on appelle une telle fonction g spline cubique d'interpolation de f qui est donc une fonction polynomiale de degré au plus 3 par morceaux et approchant f. Nous noterons $\underline{s_f = g}$ et nous allons maintenant chercher une majoration de l'erreur entre f et s_f.

III-Qualité de l'approximation par une spline cubique

En reprenant les notations des deux premières parties, on note $R = D - A_{n+1}F$, avec $D = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ et

$F = \begin{pmatrix} f_0'' \\ f_1'' \\ \vdots \\ f_n'' \end{pmatrix}$ et nous noterons $R = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$.

Soit h une fonction définie sur $[\alpha, \beta]$ bornée. On notera $\|h\|_{[\alpha,\beta]} = \sup\limits_{[\alpha,\beta]} |h|$.

1. ***a.*** On pose $L = \|f^{(4)}\|_{[a,b]}$. Montrer que L est bien définie.

b. i) Montrer que pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{6}{h^2}[f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}] - f''_{k-1} - 4f''_k - f''_{k+1} =$$
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\frac{(t - x_{k-1})^3}{h^2} - (t - x_{k-1})\right] f^{(4)}(t)dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\frac{(x_{k+1} - t)^3}{h^2} - (x_{k+1} - t)\right] f^{(4)}(t)dt.$$

ii) En déduire : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ |r_k| \leq \dfrac{3}{2}Lh^2$.

On suppose que l'inégalité précédente est aussi vraie pour $k = 0$ et $k = n$ (s'obtient par la même mé

iii) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ |m_k - f''_k| \leq \dfrac{3}{2}Lh^2$.

c. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On note Δ_k la fonction affine définie sur $[x_k, x_{k+1}]$ telle que : $\Delta(x_k) = f''_k$ et $\Delta(x_{k+1}) = f''_{k+1}$.
Soit $x \in]x_k; x_{k+1}[$ fixé. Sur $[x_k; x_{k+1}]$, on pose
$H_k : u \mapsto f''(u) - \Delta_k(u) - [f''(x) - \Delta_k(x)]\dfrac{(u - x_k)(u - x_{k+1})}{(x - x_k)(x - x_{k+1})}$.
i) Montrer que H''_k s'annule au moins sur $]x_k; x_{k+1}[$.

ii) En déduire que $\|\Delta_k - f''\|_{[x_k;x_{k+1}]} \leq L\dfrac{h^2}{8}$.

iii) En déduire qu'il existe k_1 dans $\mathbb{R}_+$ tel que : $\|g'' - f''\|_{[a;b]} \leq k_1 h^2$.

Remarque : On ne le fera pas mais on peut montrer grâce au résultat précédent qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $\|g' - f'\|_{[a;b]} \leq C_1 h^3$ et $\|g - f\|_{[a;b]} \leq C_2 h^4$.

2. Soit $h \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ et on pose $N(h) = \left(\displaystyle\int_a^b (h''(x))^2 dx\right)^{1/2}$.

On note S l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ vérifiant la condition **C1**.

a. Est-ce que l'application $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$?

b. Montrer que : $\forall s \in S,\ \displaystyle\int_a^b (f''(x) - s''_f(x))s''(x)dx = 0$ (pour la définition de s_f, voir la fin de la partie II).

c. Montrer que : $N(f - s_f)^2 = N(f)^2 - N(s_f)^2$.

d. Montrer que $N(f - s_f) = \min\limits_{s \in S} N(f - s)$.

e. Déterminer tous les s dans S telles que $N(f - s_f) = N(f - s_f)$. Quelle est la structure de l'espace des fonction s vérifiant l'égalité précédente ?