À rendre pour le mardi 19 novembre

PROBLÈME NORMAL

MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.
Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$. On dira qu'une matrice $A = (aij)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

I. EXEMPLES

1. Soit α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$

   (a) Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Démontrer que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.

   (b) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?

3. Déterminer $\mathcal{E}_2$.

II. TEST DANS LE CAS n = 3

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1}

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes : $\det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}$ et $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$

6. (a) Parmi les matrices suivantes, indiquer les matrices à diagonale propre :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Écrire en PYTHON une fonction qui permet de déterminer si une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est à diagonale propre ou non (on ne dispose pas de la fonction déterminant)

III. QUELQUES PROPRIÉTÉS

7. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $aA^T + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.
8. *Matrices trigonalisables*
   (a) Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ? (s'aider de la question 3. pour une matrice de taille 2)
   (b) Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
   (c) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
9. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

IV. MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

10. *Question préliminaire*
    Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Montrer que $\operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.
11. *Matrices symétriques à diagonale propre*
    (a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique dont les valeurs propres sont notées λ_1, ..,λ_n. Démontrer que
    $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$
    (b) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.
12. *Matrices antisymétriques à diagonale propre*
    Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.
    (a) Démontrer que $A^n = 0$ (on pourra trigonaliser A en justifiant que cela est possible). Montrer que $(A^T A)^n = 0$.
    (b) Justifier que la matrice $A^T A$ est diagonalisable puis que $A^T A = 0$ (on montrera que les seules valeurs propres de $A^T A$ sont forcément nulles).
    (c) Conclure que A est la matrice nulle.

V. DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

13. *Question préliminaire*
    Indiquer la dimension de $\mathcal{A}_n$.
14. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$. Démontrer que
    $$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$
    pour cela on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n)$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.
On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X. Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$: $\overline{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par ailleurs, $E_\lambda(\overline{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\overline{M}$.
Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i, j = 1, \ldots, n)$ et pour $k = 0, \ldots, n-1$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,i+k}, i = 1, \ldots, n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.
Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, on note u_V sa restriction à V.
De sorte que si i_V représente l'injection canonique de V dans $\mathbb{C}^n$, $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout y de V.

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X, Y]$, définie par

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Définition 1 *Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X, Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque*

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

☐ 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.

☐ 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M, A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X,\ X_{k+1} = AX_k,\ \text{pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M, A]),\ \text{pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

☐ 3 - **a.** Écrire en PYTHON une fonction `puiss(A,k)` qui A^k, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. On ne fera pas appel à la bibliothèque de PYTHON permettant d'avoir directement le produit matriciel.

b. Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j \tag{1}$$

$$[M, A]\, X_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j. \tag{2}$$

☐ 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$.

☐ 5 - Montrer que $\overline{M}$, $\overline{A}$ et $\overline{[M, A]}$ induisent des endomorphismes de G, que l'on note respectivement $\overline{M}_G$, $\overline{A}_G$ et $\overline{[M, A]}_G$

☐ 6 - Calculer la trace de $\overline{[M, A]}_G$.

☐ 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M, A]}_G$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$?

☐ 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?

☐ 9 - Établir le théorème 1.

II Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1, \ldots,$ $\mathcal{U}_p$ telles que :*

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \cdots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \tag{A}$$

$$[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \textit{ pour tout } i \in \{0, \ldots, p-1\} \tag{B}$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 *$\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.*

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit tiangulaire supérieure.

☐ 10 - Traduire la propriété "il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure" en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

☐ 11 - Montrer que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n.
On pourra considérer les sous-espaces $\mathcal{N}_k$ $(0 \leq k \leq n)$ tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k $(1 \leq k \leq n)$, $\mathcal{N}_k$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, …, $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.

Dans les questions 12 à 17, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

☐ 12 - Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.

☐ 13 - Soit r un entier non nul et une famille $M_1, M_2, \ldots, M_r$ d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \ldots, \overline{M_r}$.

☐ 14 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}$.

On note dorénavant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}.$$

Soit F et H deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$ et u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

☐ 15 - Montrer les relations suivantes :

$$p_H u = p_H u p_H \text{ et } p_H v = p_H v p_H.$$

☐ 16 - Montrer que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent puis que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ commutent.

☐ 17 - En procédant par récurrence sur n, établir le sens direct du théorème 2 dans le cas d'une algèbre de Lie résoluble pour $p = 1$.

Soit, maintenant, $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p, il existe un élément $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

☐ 18 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}$, $M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme

$$\overline{A_1} \ldots \overline{A_k}\, X$$

où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j.

☐ 19 - Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments non nuls de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

Soit $M, M' \in \mathcal{U}$.

☐ 20 - Montrer que $\overline{[M, M']}_E$ est une homothétie de trace nulle.

☐ 21 - Que peut-on en déduire ?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnement qu'aux questions 14 et 17.