À rendre pour le jeudi 28 novembre

**PROBLÈME NORMAL**

**PROBLÈME 1**

# Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité se notera $I_2$.
$\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K}), A^T$ désigne la matrice transposée de $A, \operatorname{tr}(A)$ sa trace, $\det A$ son déterminant et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de $A$ appartenant à $\mathbb{K}$.
Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on appelle matrice conjuguée de $A$ et on note $\bar{A}$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de $A$ ; la matrice transposée de la matrice $\bar{A}$ se notera $A^*$.
On rappelle que deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont dites semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ; les classes d'équivalence de cette relation sont dites les classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

# I-Résultats préliminaires

***1.*** Donner la classe de similitude d'une matrice scalaire, c'est à dire une matrice de la forme $xI_2$ avec $x \in \mathbb{K}$.

***2.*** Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

- ***a.*** Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda$ et $F_\lambda$ sont inversibles et exprimer leur inverses.
- ***b.*** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ; calculer les produits $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- ***c.*** On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est réduite à un singleton. Montrer que $A$ est une matrice scalaire.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|_S = \left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2\right)^{1/2}$.

On munira $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de cette norme.

***3.*** On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est bornée.

- ***a.*** Justifier que les parties $\left\{E_\lambda A E_\lambda^{-1}; \lambda \in \mathbb{K}\right\}$ et $\left\{F_\lambda A F_\lambda^{-1}; \lambda \in \mathbb{K}\right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont bornées.
- ***b.*** En déduire que $A$ est une matrice scalaire.

***4.*** Que peut-on dire d'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est compacte ?

## II-Condition pour qu'une classe de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

***1.*** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

***a.*** Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, avec $\lambda \neq \mu$, justifier que $A$ est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

***b.*** Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, montrer que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.

***c.*** Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et $A$ n'est pas une matrice scalaire, montrer que $A$ est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

***2.*** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

***a.*** Si $A$ est une matrice scalaire, justifier que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de $A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est fermée.

***b.*** Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et $A$ non diagonalisable, on pose $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Étudier la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

***c.*** Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, avec $\lambda \neq \mu$, soit $\left(P_k A P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$.

i. Étudier la suite $\left(P_k \left(A - \alpha I_2\right) P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $\det\left(B - \alpha I_2\right) = 0$.

ii. Montrer alors que $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et conclure que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

***3.*** Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée si et seulement si $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

***4.*** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

***a.*** Justifier que $4\det A - (\mathrm{tr}(A))^2 > 0$. Dans la suite, on pose

$$A' = \frac{2}{\delta}\left(A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} I_2\right) \text{ et } A'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) & -\delta \\ \delta & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix} \text{avec } \delta = \sqrt{4\det A - (\mathrm{tr}(A))^2}.$$

***b.*** Montrer que $A'^2 = -I_2$.

***c.*** On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A'$ et on considère un vecteur non nul $e$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice $A_1$ de $f$ dans cette base.

***d.*** Exprimer $A'$ en fonction de $A_1$ et en déduire que les matrices $A$ et $A''$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

***e.*** Soit $(P_k A P_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ qui converge vers une matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

i. Montrer que $tr(\tilde{A}) = tr(A)$ et $\det(\tilde{A}) = \det(A)$.

ii. Justifier alors que les matrices $A$ et $\tilde{A}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

***5.*** Montrer que si $A$ est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermé dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

---

**PROBLÈME 2**

---

Soit $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $T$ un endomorphisme de $V$ : on dira que le complexe $\lambda$ est une valeur propre de $T$ s'il existe un élément $f$ de $V$ non nul tel que $Tf = \lambda f$.

Soit $\mathcal{C}^0$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 1-périodiques. Cet espace est normé par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$$

On désigne par $e_0$ la fonction constante égale à 1 sur tout $\mathbb{R}$ et par $D$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ engendré par $e_0$.

Si $f \in \mathcal{C}^0$, on définit

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\right)$$

# PARTIE I

1. Montrer que toute fonction de $\mathcal{C}^0$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\|.\|_\infty$ est bien une norme sur $\mathcal{C}^0$.
3. Montrer que si $f$ appartient à $\mathcal{C}^0$ alors $Tf$ aussi. En déduire que $T$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$.
4. Montrer que pour tout élément $f$ de $\mathcal{C}^0$ on a l'inégalité $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ puis que :
   $|||T||| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|Tf\|_\infty = 1$ (on n'oubliera pas de montrer que $\sup_{\|f\|_\infty=1} \|Tf\|_\infty$ existe).

   On appelle $H^\circ$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0$ des fonctions $f$ telles que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0$$

5. Montrer que $H^\circ$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$.
6. Montrer que $H^\circ$ est stable par $T$.
7. Montrer que : $H^\circ \oplus D = \mathcal{C}^0$.
8. Expliciter la projection $P$ sur $D$ parallèlement à $H^\circ$.
9. Écrire en PYTHON la fonction qui à `f` associe `T(f)`.

# PARTIE II

Soit $\alpha \in ]0,1[$. On appelle $\mathcal{C}^\alpha$ le sous-espace de $\mathcal{C}^0$ des fonctions $f$ telles que

$$\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\} \quad \text{soit majoré}$$

On notera alors

$$m_\alpha(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\}$$

On pose

$$\|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty.$$

1. Montrer que pour tous les réels $x$ et $y$, $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x-y|$.
2. Montrer que $\mathcal{C}^\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$.
3. Montrer que $\|.\|_\alpha$ définit une norme sur $\mathcal{C}^\alpha$.
4. Montrer que $\mathcal{C}^\alpha$ est stable par $T$.
   On notera $T_\alpha$ l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\alpha$ induit par $T$.
5. Montrer que 1 est valeur propre de $T_\alpha$.
6. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^\alpha$, $\|T_\alpha f\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha$ puis que $|||T|||_\alpha = \sup_{\|f\|_\alpha=1} \|T_\alpha f\|_\alpha = 1$.
7. Montrer que $T_\alpha$ laisse invariant $H^\alpha = H^\circ \cap \mathcal{C}^\alpha$.
8. Soit $f \in \mathcal{C}^0$, montrer que

$$T^n(f)(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n})$$

9. Pour $f \in \mathcal{C}^\alpha$ et $x \in [0,1]$, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{x2^{-n}+k2^{-n}}^{x2^{-n}+(k+1)2^{-n}} f(t)\,dt$ puis étbalir l'inégalité suivante :

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_\alpha^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\,dt| \leq m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$$

***10.*** Montrer que si $f \in H^\alpha$ alors pour tout entier $n$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq 2^{1-n\alpha}\|f\|_\alpha$$

***11.*** Soit $\lambda$ une valeur propre de $T_\alpha$ différente de 1.

***a.*** Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$ non nulle telle que $T_\alpha f = \lambda f$. Montrer que $f$ est dans $H^\alpha$.

***b.*** En déduire que : $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$.

## EXERCICE

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $l$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$ : par exemple, on note par la même lettre une matrice $T$ de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont $T$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^l$, $(Mx)_i$ désigne la $i$-ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{K}^n$.

**Définition** *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l)$, est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geq 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :*

$$m_{i,j} \geq 0 \text{ (resp . } m_{i,j} > 0) \text{ pour tout } (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, l\}.$$

*Pour deux matrices $M$ et $N$ de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, $M \geq N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).*

On définit les ensembles $B$, $B^+$ et $\Sigma$ par :

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\},$$
$$B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x > 0\},$$
$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_1 = 1\},$$

avec $\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

*On suppose que $T$ est un élément positif de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que $P = (I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.*

***1.*** Montrer que pour tout $x \in B$, l'ensemble $\Gamma_x = \left\{\theta \in \mathbb{R}^+ \mid \theta x \leq Tx\right\}$ est non vide, fermé et borné.

On note $\theta(x)$ son plus grand élément.

***2.*** Montrer que pour tout $x \in B$, on peut calculer $\theta(x)$ de la manière suivante :

$$\theta(x) = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i} \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}.$$

On note $\theta$ l'application de $B$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à $x$ associe $\theta(x)$.

***3.*** Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

***4.*** Montrer que $P(B) \subset B^+$.

***5.*** Montrer que pour tout $x \in B$, $\theta(Px) \geq \theta(x)$, puis que $Tx$ est dans $B$ et $\theta(Px) > 0$.

***6.*** Soit $x \in B$ un vecteur propre de $T$. Montrer que $\theta(Px) = \theta(x)$.

***7.*** Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, montrer que $x$ est un vecteur propre de $T$ pour la valeur propre $\theta(x)$.

***8.*** Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application $\theta$ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.

***9.*** Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \displaystyle\sup_{x \in P(C)} \theta(x)$.

***10.*** Montrer que $\displaystyle\sup_{x \in P(C)} \theta(x) \geq \sup_{x \in C} \theta(x)$.

***11.*** Montrer que $\displaystyle\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x)$.

***12.*** Montrer que $\displaystyle\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \displaystyle\sup_{x \in C} \theta(x)$.

On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

***13.*** Montrer que $x_0$ est un vecteur propre, strictement positif, de $T$ pour la valeur propre $\theta_0$ et que $\theta_0 > 0$.

## PROBLÈME

**Notations :**

Dans tout le problème, le corps des scalaires ets $\mathbb{R}$ et les espaces vectoriels sont de dimension finie. Si $X$ et $Y$ sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires de $X$ dans $Y$ et on note $|||f|||$ la norme subordonnée (ou norme opérateur ou norme triple) usuelle de toute application continue $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ muni de la norme duale, c'est-à-dire de la norme subordonnée comme précédemment, où $\mathbb{R}$ est muni de la valeur absolue.

Si $X$ et $Y$ sont deux espaces vectoriels, $GL(X, Y)$ désigne comme d'habitude l'ensemble des isomorphismes de $X$ sur $Y$.

On rappelle qu'une isométrie entre deux espaces vectoriels normés $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est une application linéaire $f$ de $X$ dans $Y$ qui conserve la norme : pour tout $x \in X$, $\|f(x)\|_Y = \|x\|_X$. On dit que deux espaces vectoriels normés de dimension finie sont isométriques s'il existe une isométrie de l'un sur l'autre.

Soit $\beta$ une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n \geq 1$ ; on notera $\det_\beta(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant dans la base $\beta$ de $x_1, \ldots, x_n \in E$.

**Partie I. Espaces $l_N^p$ et leur dual.**

Dans cette partie, $p$ et $q$ sont deux réels strictement supérieurs à 1 vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soit $N$ un entier naturel supérieur ou égal à 1.

***1.*** Soient $x$ et $y$ deux réels positifs. Montrer que $xy \leq \dfrac{1}{p} x^p + \dfrac{1}{q} y^q$.

***2.*** Soient $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ des réels. Montrer que :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra d'abord envisager le cas où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p = \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1$.

***3.*** En déduire que pour tous réels $a_1, \ldots, a_N$, on a

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| ; \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1\right\}.$$

***4.*** Soient $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ des réels. Montrer que pour tout $p \geq 1$, on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Indication : $|a_n + b_n|^p \leq |a_n| \cdot |a_n + b_n|^{p-1} + |b_n| \cdot |a_n + b_n|^{p-1}$ et appliquer 2).

On pose $\|(a_1, \ldots, a_N)\|_\infty = \max\limits_{1 \leq n \leq N} |a_n|$ et on désigne par $l_N^\infty$ l'espace $\mathbb{R}^N$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour $p \geq 1$, on définit $l_N^p$ comme l'espace $\mathbb{R}^N$ muni de la norme $\|(a_1, \ldots, a_N)\|_p = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

***5.*** ***a.*** Soit $p > 1$, justifier que $l_N^p$ est bien un espace vectoriel normé dont le dual $(l_N^p)^*$ est isométrique à $l_N^q$.

Indication : on pourra considérer l'application $\theta$ de $l_N^q$ dans $(l_N^p)^*$ définie par

$$\theta(b)(a) = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n.$$

***b.*** Déterminer le dual de $l^1_N$ et celui de $l^\infty_N$.

**Partie II. Hahn-Banach fini-dimensionnel.**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, distinct de $E$, et $f$ une forme linéaire sur $F$.

***1.*** Soit $x_0$ un vecteur de $E$ n'appartenant pas à $F$. On note $\tilde{F} = F \oplus \mathbb{R}x_0$.

***a.*** Montrer que

$$\sup_{v\in\ F} \left(f(v) - |||f||| \cdot \|v - x_0\|\right) \leq \inf_{v\in\ F} \left(|||f||| \cdot \|v + x_0\| - f(v)\right).$$

***b.*** En déduire qu'il existe un réel $\alpha$ tel que pour tout $v \in F$, on ait :

$$f(v) + \alpha \leq |||f||| \cdot \|v + x_0\| \quad \text{et} \quad f(v) - \alpha \leq |||f||| \cdot \|v - x_0\|.$$

On pose pour $x = v + tx_0 \in \tilde{F}$, où $v \in F$ et $t \in \mathbb{R}$ : $\tilde{f}(x) = f(v) + \alpha t$.

***c.*** Montrer que $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue sur $\tilde{F}$ dont la restriction à $F$ est $f$ et que $|||f||| = \left|\left|\left|\tilde{f}\right|\right|\right|$.

***2.*** Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $g$ sur $E$, dont la restriction à $F$ est $f$, telle que $|||f||| = |||g|||$.

***3.*** Soit $x \in E$. Montrer que $\|x\| = \sup\left\{|f(x)|\,;\, f \in E^* \text{ avec } |||f||| = 1\right\}$.

**Partie III. Distance de Banach-Mazur. Généralités.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés de même dimension finie. ON définit

$$d(E, F) = \inf\left\{\ln\left(|||u||| \cdot \left|\left|\left|u^{-1}\right|\right|\right|\right); u \in GL(E, F)\right\}.$$

***1.*** ***a.*** Montrer que $0 \leq d(E, F)$.

***b.*** Montrer que $d(E, F) = d(F, E)$.

***2.*** ***a.*** Montrer que la borne inférieur est atteinte.

***b.*** En déduire que $E$ et $F$ sont isométriques si et seulement si $d(E, F) = 0$.

***3.*** Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels normés de même dimension finie. Montrer que

$$d(E, G) \leq d(E, F) + f(F, G).$$

***4.*** ***a.*** Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit $u^*(\zeta) = \zeta \circ u$, pour $\zeta \in F^*$. Montrer que $u^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ et que $|||u||| = |||u^*|||$.

***b.*** En déduire que $d(E, F) = d(E^*, F^*)$.

**Partie IV. Distance de Banach-Mazur entre espaces $l^p_n$.**

On note $E = l^p_n$ (qui est $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$), où $p \geq 1$ et $F = l^2_n$. On note $\omega_n$ l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{-1, 1\}$.

***1.*** Soit $m$ un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_m \in F$, on a :

$$2^{-m} \sum_{\varphi\in\omega_n} \left\|\sum_{i=1}^{m} \varphi(i) x_i\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_2^2.$$

Soit $u : l^p_n \to l^2_n$ un isomorphisme. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et

$$A(u) = \sum_{\varphi\in\omega_n} \left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi(i) u(e_i)\right\|_2^2$$

2. **a.** Montrer que $A(u)\leq n2^n \left|\left|\left|u\right|\right|\right|^2$.

   **b.** Montrer que $A(u)\geq 2^n n^{2/p} \left|\left|\left|u^{-1}\right|\right|\right|^{-2}$.

3. Montrer que $d(l_n^p, l_n^2)\geq \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| \ln(n)$.

4. **a.** Montrer que pour tout $p'\geq p\geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p$.

   **b.** Montrer que $d(l_n^p, l_n^2) = \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| \ln(n)$.

   Indication : on pourra considérer l'identité sur $\mathbb{R}^n$.

   **c.** Que se passe-t-il pour $p=\infty$ ?

**Partie V. Distance de Banach-Mazur à $l_N^1$.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1 et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension $n$. On note $S_E$ la sphère unité de $E$.

1. Montrer qu'il existe $n$ vecteurs $b_1, \ldots, b_n$ de $E$ de norme 1 et $n$ formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de norme (opérateur) égale à 1 telles que pour tous $1\leq i, j\leq n$, on ait $\varphi_i(b_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
   Indication : on pourra considérer l'application : $\Lambda : S_E \times \ldots \times S_E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à un $n$-uplet de vecteurs $(x_1, ;, x_n)$ associe leur déterminant dans une base $\beta$ ; ainsi que l'application, à $i$ fixé et quand $\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$ est non nul, qui à $x \in E$ associe
   $$\frac{\det_\beta(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\det_\beta(x_1, \ldots, x_n)}.$$

2. On pose pour tout $x \in E$ : $\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)|$. Montrer que $\nu$ est une norme sur $E$ et qu'en notant $E_1$ l'espace $E$ muni de cette norme, $E_1$ et $l_n^1$ sont isométriques.

3. Montrer que $d(E, l_n^1)\leq \ln(n)$.

**Partie VI. Compact de Minkowski (FACULTATIF)**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1, on note $M_n$ l'ensemble des normes sur $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\| \in M_n$.
Pour $X$ et $Y$ dans $\mathcal{E}_n$, on définit la relation $X\mathcal{R}Y$ si $X$ et $Y$ sont isométriques.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}_n$. Justifier la notation $\hat{d}(\hat{X}, \hat{Y}) = d(X, Y)$ (où $\hat{X}$, resp. $\hat{Y}$, est la classe de $X$, resp. de $Y$) est cohérente.

   On note $\hat{\mathcal{E}}_n$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence.
   On note $B_1$ la boule unité (fermée) de l'espace $l_n^1$ et $C(B_1)$ est l'espace des fonctions continues sur $B_1$, à valeurs réelles, muni de la norme $N_\infty(f) = \sup\{|f(x)| ; x \in B_1\}$. On note $\Phi_n$ l'ensemble des fonctions continues sur $B_1$ qui sont la restriction à $B_1$ d'une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq \|x\|_1$ et $\|x\|_1 \leq n \|x\|$.

2. **a.** Montrer que $\Phi_n$ est une partie fermée bornée de $C(B_1)$.

   **b.** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in B_1$ :
   $$\|x-y\|_1 \leq \delta \Rightarrow \sup\{|f(x) - f(y)| ; f \in \Phi_n\}\leq\varepsilon.$$

   **On admet dans la suite que ces deux résultats impliquent que $\Phi_n$ est une partie compacte de $C(B_1)$ (Théorème d'Ascoli).**

3. On considère l'application $\tau$ de $\Phi_n$ dans $\hat{\mathcal{E}}_n$ qui à $f$ associe la classe de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée à $f$ par définition de $\Phi_n$.

   **a.** Montrer que $\tau$ est bien définie et surjective.

   **b.** Montrer que si $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ dans $\Phi_n$ alors $\lim_{j\to\infty} \hat{d}(\tau(f_j), \tau(f)) = 0$.