À rendre pour le mardi 10 décembre

DM NORMAL

EXERCICE

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite ℓ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, 1]$ la fonction en escalier f_n par : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right[, f_n(t) = w_k$ et $f_n(1) = w_n$.

1. Déterminer $\int_0^1 f_n(t) dt$.
2. Prouver que l'on a, pour tout $t \in [0, 1[$, $f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .
3. En déduire, pour tout $t \in [0, 1]$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$.
4. Prouver alors que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \ell$.

PROBLÈME

Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Partie 1 : Exemples

1. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n$ puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

2. Ecrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions en se rappelant

que : $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

3. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
 - Écrire en PYTHON une fonction $\mathbf{S}(n, x)$ qui calcule $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx)$. Tracer cette fonction sur $[-\pi, \pi]$, pour $n = 10, n = 100$ et $n = 1000$.
 - Comment pouvez-vous constater graphiquement qu'il n'y a pas convergence uniforme ?

Partie 2 : Propriétés

Une condition suffisante

5. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.
7. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.
9. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx$ pour k et n entiers.
10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x , $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0 . On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

11. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x , on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k(f) \cos(kx) + \beta_k(f) \sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

12. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n , $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x , on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$$

13. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$.

14. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

15. En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

16. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$.

On admet que : $\forall x \in [0, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$.

17. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?

Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

18. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n} \cos(nx)$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

On admet le résultat suivant : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv = \sqrt{\pi}$.

A Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx}$.

1. Montrer que f et g sont définies et continues sur I .

2. Montrer que pour tout $x \in I$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$.

En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

3. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right)_{n \geq 1}$ converge.

4. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

5. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \rightarrow 0$.

B Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geq 0$ pour lesquels la série $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx}$ converge.

On pose $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$.

Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim_{x \rightarrow 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

6. Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

7. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n , on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont inférieurs ou égaux à n . Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n \geq 0} \text{Card}(A(n)) e^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Card}(A(n)) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1 - e^{-x}}$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

8. Montrer que si $x > 0$, $\frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} [\sqrt{n}] e^{-nx}$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S , et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

9. a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} v(n) e^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leq (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

b. Écrire en PYTHON une fonction qui à $n \in \mathbb{N}^*$ renvoie $v(n)$.

c. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et on pose $S_N : x \mapsto \sum_{n=1}^N x v(n) e^{-nx}$. Tracer S_N sur $]0, 1]$ pour $N = 10$, $N = 100$, $N = 1000$ et $N = 5000$. Donner une estimation de $\Phi(A)$.

C Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x \geq 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel $\mathcal{F}(]0, +\infty, \mathbb{R})$, E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$ et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par la formule $\| \psi \|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx}).$$

10. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F . Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E_1 , $\psi_1 \leq \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x \rightarrow 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x \rightarrow 0} x(L(\psi))(x)$$

11. Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \cdot \|_\infty)$.

12. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0, 1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et montrer que $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tous $a, b \in]0, 1[$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0, 1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1 - a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a - \varepsilon] \\ \frac{a - x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a - \varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a, 1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a + \varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a + \varepsilon, 1]. \end{cases}$$

13. Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et montrer que $\Delta(1_{[0,a]}) = a\ell$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0, 1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1]. \end{cases}$$

14. Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \alpha_k = \ell$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) tels que $n = p^2 + q^2$.

15. Si $A \in S$, que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card}(A(n))$? Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v(k)$.