À rendre pour le jeudi 19 décembre

DM NORMAL

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par : $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :
$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière "usuels", donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :
 a. (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
 b. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
 c. (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
 d. La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. *Exemple*
Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$
(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

II THÉORÈME D'ABEL

4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge. On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).

On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

a. Simplifier, pour tout $x \in [0,1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

c. Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, puis que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ et pour tout réel $x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

d. Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$?

6. *Exemple*

Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x)$, puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. *Application*

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

a. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-il une série convergente ?

(On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ pour $n \geqslant 1$).

b. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres réels ; on pose, pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

III RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition $(\mathcal{Q})$ à la condition $(\mathcal{P}_2)$ de telle sorte que si (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$.

9. On prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété : pour tout entier n, $a_n \geqslant 0$.

Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie la propriété $(\mathcal{P}_1)$ (on pourra montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \lim_{x \to 1^-} f(x)$).

Si on prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété : la suite (a_n) vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$), on obtient **le théorème de Littlewood** dont on admettra la démonstration pour l'appliquer dans la partie suivante.

IV SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

Désormais, on admet et on pourra utiliser le théorème de Littlewood :
si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}$.

10. Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n x^{n-1} \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n.$$

On pose, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

11. Établir que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

12. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

13. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et que la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

14. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$ pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge. Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

15. *Exemple*

Dans le cas où la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est périodique de période 6 avec :

$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = -1, \varepsilon_5 = -1, \varepsilon_6 = -1$, déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$.

(il est demandé de détailler les calculs).

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite numérique, on note $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ la limite (si elle existe) de la suite $A_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$.

L'expression $i = 1, m$ signifie “pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq m$”.

Soit $\zeta \in \mathbb{C}$, on rappelle que si $Re(\zeta) > 0$ alors $\operatorname{Arg}(\zeta) = \operatorname{Arctan}(Im(\zeta)/Re(\zeta))$.

Dans tout ce problème, z notera un nombre complexe non nul et x un nombre réel tel que $|x| < 1$.

1 Préambule.

1. Soient $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\zeta_k) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|\zeta_k|) - 1 \tag{1}$$

2 La formule de Jacobi.

On pose

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2k}) \quad \text{et} \quad H(x,z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^2 x^{2k-1}) \tag{2}$$

2. Montrer que $Q(x)$ est bien défini, c'est à dire que le suite de terme général $\prod_{k=1}^{n}(1 - x^{2k})$ converge.

3. Soit $\rho_k = |1 + z^2 x^{2k-1}|$. Montrer que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} \rho_k$ converge.

4. Soit $\theta_k = \operatorname{Arg}(1 + z^2 x^{2k-1})$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k$ converge.

5. En déduire que H est bien défini.

6. Démontrer que $Q(x) \to 1$ quand $x \to 0$. On pose

$$F(x,z) = H(x,z)H(x,z^{-1}) \tag{3}$$

7. Montrer que

$$F(x,xz) = (1 + z^{-2}x^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^2 x^{2k+1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^{-2}x^{2k-1})$$

et en déduire que $xz^2 F(x,xz) = F(x,z)$. Pour x fixé, on admettra que $F(x,z)$ se décompose de façon unique sous la forme suivante :

$$F(x,z) = F_1(x,z) + F_2(x,z^{-1})$$

$F_1(x,\xi)$ et $F_2(x,\xi)$ sont les sommes respectives de deux séries entières de rayon de convergence infini, soit

$$F_1(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\xi^k \quad \text{et} \quad F_2(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(x)\xi^k$$

les fonctions a_k, $k = 0, \infty$ et a_{-k}, $k = 1, \infty$, de la variable réelle x étant à valeurs dans $\mathbb{C}$. On notera

$$F(x,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x) z^k, \ \ z \in \mathbb{C}^* \tag{4}$$

8. On pose $F_1^n(x,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) z^k$. Démontrer que $a_0(x) = F_1(x,0)$ et que pour $n \geq 0$,

$$a_{n+1}(x) = \lim_{z \to 0} \frac{F_1(x,z) - F_1^n(x,z)}{z^{n+1}}$$

9. En déduire que si $F(x,z)$ vérifie à la fois (4) et $F(x,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(x) z^k$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les fonction a_k et d_k sont égales, c'est à dire que les coefficients $a_k(x)$ dans l'expression (4) de $F(x,z)$ sont déterminés de façon unique.

10. Montrer qu'il existe des fonctions b_m, $m \in \mathbb{Z}$, de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \ F(x,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x) z^{2m}$$

11. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z}$, $b_m(x) = b_{m-1}(x) x^{2m-1}$.

12. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $b_m(x) = b_{-m}(x)$ et donner l'expression de $b_m(x)$ en fonction de $b_0(x)$ et x.

13. Montrer que $H(x,z) \to 1$ quand $x \to 0$.

14. En déduire que $b_0(x) \to 1$ quand $x \to 0$.

On pose

$$P(x,z) = Q(x) F(x,z) \ \ \text{et} \ \ \eta = e^{i\pi/4} \tag{5}$$

15. Montrer que

$$P(x,\eta) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{4k}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{4k-2}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{4k-2})$$

16. En déduire que $P(x,\eta) = P(x^4, i)$.

On pose $c_m(x) = Q(x) b_m(x)$.

17. À l'aide de la question 16 et de l'expression de $b_m(x)$ de la question 12, montrer que : $c_0(x^4) = c_0(x)$.

18. En utilisant une récurrence et à l'aide des questions 14 et 6, en déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $c_0(x) = 1$ et la *formule du triple produit*

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^2 x^{2k-1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^{-2} x^{2k-1}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m} \tag{6}$$

3 Le nombre de partitions d'un entier.

19. En posant $x = t^{3/2}$ et par un choix judicieux de z^2, déduire la *formule des nombres pentagonaux* d'Euler :

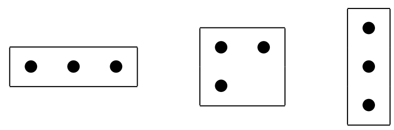
$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - t^m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{(3m^2+m)/2}, \ \ t \in [0,1[\tag{7}$$

de celle du triple produit (6).

Si n est un entier positif, on note $p(n)$, et on appelle nombre de partitions de n, le nombre de façons de représenter n comme une somme d'entiers positifs sans prendre en considération l'ordre des termes ; c'est encore le nombre de solutions $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}^n$ de l'équation

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = n, \quad \text{telles que} \quad r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n \geq 0 \tag{8}$$

On aura par exemple $p(3) = 3$ car $3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, partitions que l'on représente sous la forme des trois diagrammes de Ferrer suivants :



On note S_1 l'ensemble des solutions de (8). On note également S_2 l'ensemble des solutions $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ de

$$\sum_{j=1}^{n} j q_j = n \tag{9}$$

On note f l'application $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ définie par $f(q_1, \ldots, q_n) = (r_1, \ldots, r_n)$ où $r_j = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} q_i$.

20. En s'aidant de l'application f, démontrer que S_1 et S_2 comportent le même nombre d'éléments.

21. Démontrer que pour $n > 0$, $p(n)$ est le coefficient de t^n dans le développement de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik} \right)$.

22. À l'aide de la formule d'Euler (7), démontrer que

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k) t^k\right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{(3m^2+m)/2}\right) = 1$$

23. En déduire la valeur de $p(n)$, $n = 1, 7$.