À rendre pour le jeudi 9 janvier

EXERCICE COMMUN À TOUS

PARTIE A. Recherche de zéro d'une fonction

1. Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.

- ***a.*** Justifier que f s'annule sur $[a, b]$.
- ***b.*** Écrire une fonction Python `rech_dicho` prenant en arguments une fonction `f`, deux flottants `a` et `b` tels que `f(a)f(b)<0` et une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de `f` à une précision `eps` près (on utilisera un algorithme de dichotomie).

2. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

- ***a.*** Montrer que f admet un point fixe (c'est-à-dire un réel c de $[0, 1]$ tel que $f(c) = c$).
- ***b.*** Écrire une fonction Python `rech_pt_fixe` qui prend en argument une fonction `f` que l'on suppose continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, un précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de `f` à une précision `eps` près. On pourra utiliser la fonction `rech_dicho`.

PARTIE B. Recherche dans une liste

1. On propose l'algorithme suivant

```python
def rech_dicho(L,g,d,x):
    """L est une liste telle que L[g:d+1] est triee"""
    if x>L[d] :
        return d+1
    else :
        a=g
        b = d
        while a != b :
            c = (a+b)//2
            if x <= L[c] :
                b = c
            else :
                a = c+1
    return a
```

- ***a.*** On prend `L = [2,4,5,7,7,9,10]`. Que renvoient les instructions suivantes ?
  `>>> rech_dicho(L,1,5,6)`
  `>>> rech_dicho(L,0,5,1)`
  On donnera les valeurs prises par les variables `a` et `b` à chaque passage ligne 9.
- ***b.*** Détailler clairement ce que fait le programme `rech_dicho`.
- ***c.*** Déterminer, en le justifiant, la complexité du programme, mesurée en nombre de comparaisons. On utilisera, si besoin est, la notation O, et on pourra exprimer cette complexité en fonction d'un ou plusieurs paramètres parmi `len(L), g, d, x`.

2. Proposer un algorithme `tri_dicho` de tri par insertion **utilisant la fonction** `rech_dicho` pour trouver la position à laquelle insérer l'élément.

3. Estimer le nombre **d'affectations** de `tri_dicho` ainsi que le nombre de **comparaisons** effectuées par l'algorithme `tri_dicho` . Comparer avec le tri par insertion classique.

EXERCICE (RÉVISION FACULTATIF)

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).
Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA.$$

On note $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Enfin, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

- ***a.*** Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.
- ***b.*** Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.
- ***c.*** En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

- ***a.*** Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
  - i. Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.
  - ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de A^T.
  - iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et $A^TY = \overline{z}Y$.
    En calculant $\phi_A\left(XY^T\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.
- ***b.*** En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
  On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.
- ***c.*** Démontrer que, pour tout couple (i,j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.
- ***d.*** En déduire que A est diagonalisable.

3. On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leq p \leq n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

   a. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \operatorname{Ker} \phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

   b. En déduire que $B \in \operatorname{Ker} \phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

   c. Préciser la dimension de $\operatorname{Ker} \phi_A$.

4. Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

   a. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

   b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\phi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

   c. Démontrer que le polynôme $X\pi_B' - d\pi_B$ est le polynôme nul (π_B' étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).

   d. En déduire que $B^d = 0$.

PROBLÈME

On dispose d'une pièce donnant P (Pile) avec une probabilité $p \in]0,1[$ et F (Face) avec une probabilité $q = 1 - p$. On effectue une infinité de lancers successifs de la pièce. On numérote les lancers à partir de 1 (autrement dit, les premier lancer est aussi appelé lancer numéro 1 et non numéro 0). Pour tout entier $n \geq 1$, on notera P_n (resp. F_n) l'événement « la pièce tombe sur P (resp. F) lors du n-ème lancer ». Pour alléger les notations, on pourra se dispenser d'écrire les symboles $\cap$ pour décrire les événements : ainsi on pourra noter $P_1P_2F_3$ au lieu de $P_1 \cap P_2 \cap F_3$ l'événement « les deux premiers lancers ont donné P et le troisième F ».
On appelera *motif* toute suite finie de résultats consécutifs de lancers. Dire, par exemple, que le motif PF apparaît signifie que, dans la succession infinie de lancers, on a obtenu au moins une fois P, immédiatement suivi par F. On dira que la motif m_1 apparaît avant le motif m_2 si et seulement si,

- le motif m_1 apparaît ;
- soit le motif m_2 n'apparâit jamais, soit il apparâit pour la première fois après la première apparition de m_1

Préliminaires

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x pour que la série $\sum nx^{n-1}$ soit convergente.

2. Cette condition étant satisfaite, calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

3. De même calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ et on précisera pour quels x ceci est valable.

Partie I : PF, FP, PP ou FF en premier ?

1. Déterminer la probabilité de l'événement « le motif PP apparaît avant le motif FP ».

2. a. Déterminer la probabilité de l'événements « le motif FP apparaît avant le motif FF » (on calculera auparavant la probabilité que FP apparaisse pour la première fois aux lancers k et $k+1$ sans que le motif FF apparaisse avant le motif FP).

   b. Déterminer la probabilité de l'événement « le motif PP apparaît avant le motif PF ».

c. Déterminer la probabilité de l'événement « le motif PF apparaît avant le motif FP » (on calculera auparavant la probabilité que F apparaisse pour la première fois au lancer k sans que le motif FP apparaisse avant le motif PF).

3. Déterminer la probabilité de l'événement « le motif PF apparaît avant le motif FF ».

4. Déterminer la probabilité de l'événement « le motif PP apparaît avant le motif FF ». On pourra pour cela s'intéresser à la parité du rang d'appartition du premier motif PP.

5. Présenter dans un tableau à double entrée, pour chacun des motifs $\{PP, PF, FP, FF\}$, sa probabilité d'apparition avant chacun des trois autres.

6. On suppose dans cette question que $p = 1/2$.

a. Je choisis le motif PP et vous en choisissez un autre de longueur 2. Le vainqueur est celui dont le motif apparaît en premier. Lequel choisissez-vous ?

b. C'est maintenant à vous de choisir un motif avant moi. Lequel choisissez-vous ?

Partie II : rang d'apparition d'un motif

Dans cette partie, p est à nouveau quelconque dans l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour tout entier $n \geq 2$, on note A_n l'événements « le motif PF apparaît pour la première fois à l'issue du n-ème lancer » (on dira encore que le motif PF apparaît au rang n et dans ce cas F apparaît au lancer $n-1$ et P au lancer n).

a. Montrer que pour $n \geq 2$, on a : $P(A_n) = \dfrac{pq}{p-q}(p^{n-1} - q^{n-1})$ si $p \neq 1/2$ et $P(A_n) = (n-1)p^n$ si $p = 1/2$.

b. Quelle est la probabilité de l'événements A : « le motif PF apparaît au moins une fois » ?

c. Quel est le rang moyen d'apparition du motif PF (qui est $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} nP(A_n)$, et on justifiera la convergence de cette série) ? Pour quelle valeur de p, ce rang est-il minimal ?

d. La fonction `random()` renvoie aléatoirement (de façon uniforme) un réel de $[0, 1[$ (on aura besoin de `from random import *`).
Écrire une fonction PYTHON `pf(n,p)` qui renvoie aléatoirement une liste de 0 et 1 de taille n, avec une probabilité p d'avoir 0 et $1-p$ d'avoir 1.
Écrire une fonction PYTHON `apparition(n,p)` qui à n, renvoie le rang d'apparition pour la première fois du motif 01 pour une liste aléatoire construite précédemment (on enverra un message d'erreur si ce motif n'apparaît pas).
Vérifier expérimentalement en faisant 1000 essais sur des listes de taille 100 que le rang moyen d'apparition de ce motif correspond à la question précédente.

Dans la suite de cette partie, on s'intéresse à l'apparition du motif PP. Pour tout entier $n \geq 1$, on noter E_n l'événements « le motif PP apparaît pour la première fois à l'issu du n-ème lancer »(dans ce cas P apparaît au lancer $n-1$ et P au lancer n). On note également $u_n = P(E_n)$.

2. Calculer u_1, u_2 et u_3.

3. *a.* Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $P(E_n|F_1) = u_{n-1}$.

b. Exprimer de même $P(E_n|P_1 \cap F_2)$.

4. Montrer que : $\forall n \geq 3,\ u_n = (1-p)u_{n-1} + p(1-p)u_{n-2}$.

5. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme. Quelle interprétation donner à ce résultat ?

6. *a.* Montrer que : $(1-p)(1-\frac{p^2}{2}) + p(1-p) \leq (1-\frac{p^2}{2})^2$.

b. En déduire que, tout tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq 4\left(1 - \dfrac{p^2}{2}\right)^n$.

c. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nu_n$ converge et calculer sa somme. Que représente-elle ?

PROBLÈME 1 (RÉVISION FACULTATIF)

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Etant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in [|1,n|]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $M_n(\mathbb{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i,j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée M^T.
Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.
On note $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ les sous-ensembles de $M_n(\mathbb{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.
On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers,

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1 *Etant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{K})$, et un élément j de $[|1,n|]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ème.*

Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$, on notera $K(M) \in M_{n-1}(\mathbb{K})$, $R(M) \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $L(M) \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a(M) \in \mathbb{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right) \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : M_n(\mathbb{K}) \to M_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L : M_n(\mathbb{K}) \to M_{1,n-1}(\mathbb{K})$, évidemment linéaires.

Objectifs

Définition 2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est* **quasi-nilpotente** *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. Une partie V de $M_n(\mathbb{K})$ est dite* **quasi-nilpotente** *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*
On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $M_n(\mathbb{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suit :

Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents) *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent N de $M_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{QN}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie C.

Lemme (Lemme des colonnes) *Pour tout sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[|1,n|]$ tel que $C_j(V) = \{0\}$.*

A. Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$?

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$.

3. Montrer que $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que la dimension de $S_n(\mathbb{K})$ est $n(n+1)/2$.

4. Montrer que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{K})$. Vérifier que

$$\dim(T_n^{++}(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

5. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X = 0$. En déduire que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A_n(\mathbb{R}) = \{PMP^{-1}/\ M \in T_n^{++}(\mathbb{R})\}$$

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite à la question 1

B. Cas réel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

7. Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $M_n(\mathbb{R})$. Le résultat obtenu tient-il si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

8. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

C. Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

9. Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $M_n(\mathbb{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [|1, n|]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right)$$

10. Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_{n-1}(\mathbb{K})$.

11. En déduire qu'il existe un entier $j \in [|1, n-1|]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[|1, n|]$ dans lui même. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [|1, n|],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On considère la matrice P_σ de $M_n(\mathbb{K})$:

$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$$

12. Écrire en PYTHON une fonction `perm(L)`, avec L une liste $[a_1, ..., a_n]$ où les a_i sont dans $[\![1, n]\!]$ deux à deux distincts, qui renvoie P_σ, telle que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \sigma(j) = a_j$.

13. Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

14. Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

15. Pour $M \in M_n(\mathbb{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ.

16. Montrer que l'ensemble

$$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [|1, n|]$.

17. En déduire que pour tout $j \in [|1, n|]$ on peut choisir un $f(j) \in [|1, n|] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$. On obtient ainsi une fonction

$$f \ :\ [|1, n|] \to [|1, n|]$$

18. En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1, \ldots, j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[|1, n|]$ telle que

$$\forall k \in [|1, p-1|],\ f(j_k) = j_{k+1} \ \text{ et } \ f(j_p) = j_1$$

19. Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)}$ et conclure.

D. Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$.
On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, et en particulier de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K \ :\ V \to M_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L \ :\ V \to M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}$$

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que $C_n(V) = \{0\}$.

20. Montrer que $\dim(V) \leq \dim(K(W)) + (n-1)$.

21. En déduire que $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0\}$.

22. Démontrer que $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Soit $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ L_k = X(X+1)...(X+k-1) \end{cases}.$$

Préliminaires

1. Soit $f_\alpha : x \mapsto (1-x)^{-\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que f_α est décomposable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ que l'on précisera et que :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}.$$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ L_n(\alpha+\beta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta)$.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme R_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Partie I

On dispose d'un stock infini de boules noires et blanches. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

- on tire au hasard une boule de l'urne ;
- on replace dans l'urne la boule tirée ;
- on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires par $X_0 = 1$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, X_n donne le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages. On note g_n la fonction génératrice de la variable X_n définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = k)t^k$.

1. Déterminer X_1, X_2 et X_3, puis g_1, g_2 et g_3.

2. Soient n et k deux entiers de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1}P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1}P(X_{n-1} = k).$$

3. En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \frac{t^2-t}{n+1}g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t).$$

4. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k.$$

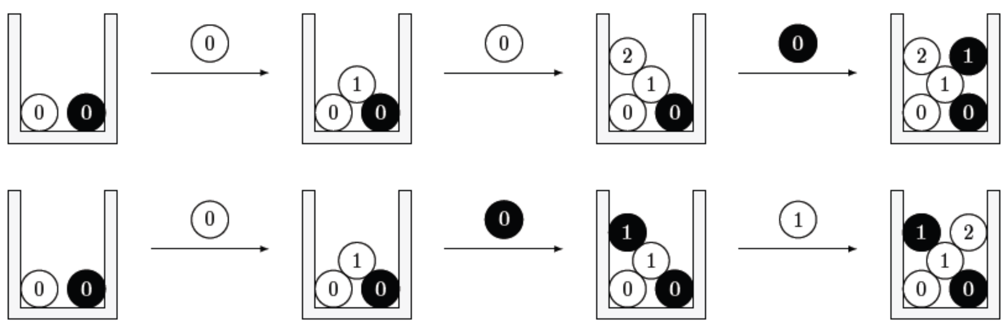
5. Identifier la loi de X_n et donner son espérance.

6. La fonction `random()` qui renvoie aléatoirement (de façon uniforme) un réel de $[0,1[$ (on aura besoin de `from random import *`).
Écrire une fonction PYTHON `X(n)` qui renvoie le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages aléatoires.
Écrire une fonction PYTHON `E(n,k)` qui renvoie la moyenne des valeurs de `X(n)` sur k expériences. Vérifier expérimentalement l'espérance trouvée dans la question précédente.

Partie II

Dans cette partie, on généralise le modèle de la partie précédente.
Soient a_0, b_0, a, b, c et d si entiers naturels. On dispose à nouveau d'un stock infini de boules noires et blanches, mais celles-ci sont cette fois numérotées, à partir de 0, de manière à pouvoir les différencier. L'urne contient initialement a_0 boules blanches et b_0 boules noires. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :
- on tire au hasard une boule de l'urne ;
- on replace dans l'urne la boule tirée ;
- si la boule tirée est blanche, on ajoute dans l'urne a boules blanches et b boules noires ;
- si la boule tirée est noire, on ajoute dans l'urne c boules blanches et d boules noires.

On suppose que $a+b=c+d$, on dit alors que l'urne est équilibrée et on note $s=a+b=c+d$.
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, une issue résultant de n tirages successifs est modélisée par le n-uplet indiquant la couleur et le numéro des boules successivement obtenues. On note Ω_n l'ensemble des issues possibles de ces n tirages.
La figure ci-dessous donne deux exmples de trois tirages ($n=3$), pour $a_0=b_0=1,\ a=d=1$ et $b=c=0$ (modèle de la partie précédente). La boule au dessus de chaque flèche représente celle qui a été tirée.



La première suite de trois tirages est modélisée par l'issue $\omega_1=(B_0,B_0,N_0)\in\Omega_3$; la deuxième suite est modélisée par l'issue $\omega_1=(B_0,N_0,B_1)\in\Omega_3$. On note que ces deux issues différentes aboutissent à la même composition de l'urne.
Pour $\omega\in\Omega_n$, on note $b(\omega)$ (respectivement $n(\omega)$), le nombre de boules blanches (respectivement noires) présentes dans l'urne à la fin des n tirages modélisés par ω.
Pour tous réels u et v, on pose $P_0(u,v)=u^{a_0}v^{b_0}$ et $P_n(u,v)=\sum\limits_{\omega\in\Omega_n} u^{b(\omega)}v^{n(\omega)}$.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note à nouveau X_n le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après n tirages et g_n sa fonction génératrice.
Dans les deux questions suivantes, on suppose $a_0=1,\ b_0=0,\ a=d=0$ et $b=c=1$. En d'autres termes, l'urne contient au départ, une boule blanche et, à chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur opposée à celle qui a étét tirée.

1. En dressant la liste de toutes les issues possibles, donner la loi de X_3.
2. Vérifier que $P_3(u,v)=u^3v+4u^2v^2+uv^3$.

On revient désormais au cas général d'une urne équilibrée.

3. En examinant le nombre de boules dans l'urne juste avant chaque tirage, justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{card}(\Omega_n) = (a_0 + b_0) \times ... \times ((a_0 + b_0 + s(n-1)) = s^n L_n\left(\frac{a_0 + b_0}{s}\right).$$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N},\ P(X_n = k) = \dfrac{\mathrm{card}(\{\omega \in \Omega_n;\ b(\omega) = k\})}{\mathrm{card}(\Omega_n)}$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \dfrac{1}{\mathrm{card}(\Omega_n)} P_n(t, 1)$.

6. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u, v \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(u, v) = u^{a+1} v^b \dfrac{\partial P_n}{\partial u}(u, v) + u^c v^{d+1} \dfrac{\partial P_n}{\partial v}(u, v)$.

$\dfrac{\partial P_n}{\partial u}$ désigne la dérivée par rapport à la variable u, avec v fixé, de la fonction $u \mapsto P_n(u, v)$ et $\dfrac{\partial P_n}{\partial v}$ désigne la dérivée par rapport à la variable v, avec u fixé, de la fonction $v \mapsto P_n(u, v)$.

Pour tous réels x, u et v, on pose, sous réserve d'existence

$$H(x, u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(u, v) \frac{x^n}{n!}.$$

Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $D_\rho =]-\rho, \rho[\times]0, 2[^2 = \{(x, u, v) \in \mathbb{R}^3;\ |x| < \rho,\ 0 < u < 2,\ 0 < v < 2\}$.

7. Justifier que, pour ρ assez petit, la fonction H est bien définie sur D_ρ.

On, fixe un tel ρ dans toute la suite de cette partie

8. Justifier que $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, u, v)$ existe bien pour (x, u, v) dans D_ρ (obtenue par dérivation terme à terme par rapport à x dans l'expression de H).

9. Justifier que $\dfrac{\partial H}{\partial u}(x, u, v)$ existe bien pour (x, u, v) dans D_ρ (obtenue par dérivation terme à terme par rapport à u dans l'expression de H).
On admet qu'il en est de même pour la variable v.

10. Vérifier que $H(0, u, v) = u^{a_0} v^{b_0}$, puis que H vérifie :

$$\forall (x, u, v) \in D_\rho,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x, u, v) = u^{a+1} v^b \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) + u^c v^{d+1} \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v).$$

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ a = d = 0,\ b = c = 1$.

1. On conserve les notations de la partie précédente (tous les résultats de cette partie peuvent être admis). On a donc en particulier $\mathrm{card}(\Omega_n) = n!$. On admet, pour $0 < u < v$ et $|x|$ assez petit, l'égalité

$$H(x, u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} p^n (v-u)^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^p \right).$$

a. À l'aide de la dernière question du préliminaire, justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tous réels u, v avec $0 < u < v$, la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} p^n (v-u)^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^p$ est une fonction polynomiale de u et v.

On a donc, grâce à la partie II, pour tout entier n et pour tout $t \in]0,1[$,

$g_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{+\infty} p^n(1-t)^{n+1}$.

Dans toute la suite, on fixe un entier $n \geq 2$.

b. Montrer que $\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n(1-t)^{n+1} =_{t\to 0^+} O(t^{n+1})$.

c. En utilisant ce qui précède et en développant $(1-t)^{n+1}$, déterminer le développement limité de g_n à l'ordre n en 0.

d. En déduire que, pour tout m de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$P(X_n = m) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \binom{n+1}{k}(m-k)^n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = (u_0, ..., u_n)$ une suite d'entiers, deux à deux distincts. Une montée (respectivement descente) de u est un indice $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $u_i < u_{i+1}$ (respectivement $u_i > u_{i+1}$).

a. Soit k un entier supérieur ou égal à 1, $(u_0, ..., u_k)$ une suite finie d'entiers, et a un entier tel que : $\forall p \in [\![0,k]\!],\ a > u_p$. On insère la valeur a dans cette suite juste après u_i, avec $i \in [\![0, k-1]\!]$, de manière à obtenir la suite $(u_0, ..., u_i, a, u_{i+1}, ..., u_k)$. Comparer le nombre de montées et de descentes de la nouvelle suite par rapport à l'ancienne. On distinguera deux cas.

On note S_n l'ensemble des permutations $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire des fonctions bijectives de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même.
On représente un élément σ de S_n par la suite finie $(\sigma(1), \sigma(2)..., \sigma(n))$ et on appelle montée (respectivement descente) de σ une montée de cette suite. Par exemple, avec $n = 4$, la permutation σ représentée par la liste $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)) = (4, 1, 3, 2)$ admet une montée et deux descentes. Pour tout entier m, on note $A_{n,m}$, le nombre d'éléments de S_n avec m montées.

b. Déterminer les éléments de S_3 et calculer parmi eux le nombre de permutations avec m montées pour tout entier m . Comparer les valeurs obtenues avec les coefficients de $P_3(X,1)$.

c. Soit $n \geq 2$. Déterminer $A_{n,0}$, $A_{n,n-1}$ et $A_{n,m}$, pour $m \geq n$.

L'objectif de ces dernières questions est de déterminer $A_{n,m}$, pour tous entiers $n \geq 2$ et $m \leq n-1$ en établissant un lien entre ces valeurs et le modèle d'urne étudié dans cette partie.

On étudie un algorithme permettant de construire une permutation de S_n à partir d'une issue correspondant à n tirages.

- On démarre la construction à la suite du premier tirage : on a nécessairement tiré la boule blanche et l'urne contient maintenant une boule de chaque couleur. On considère la suite $(0, 1, 0)$ qui comporte exactement une montée et une descente.
- Si on tire la boule blanche (respectivement noire) lors du deuxième tirage, on insère la valeur 2 au milieu de la première et unique montée (respectivement descente) de la suite pour obtenir la suite $(0, 2, 1, 0)$ (respectivement $(0, 1, 2, 0)$).
- Plus généralement, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, si au k-ième tirage on tire une boule blanche (respectivement noire) numérotée p, on insère la valeur k dans la suite au milieu de la $(p+1)$-ième montée (respectivement descente).
- À la fin de la construction, on supprime les deux 0 de la liste (qui sont nécessairement restés en début et fin de liste).
  La liste obtenue contient les entiers de 1 à n et représente un élément σ de S_n. Si ω désigne la suite des tirages, on note $\sigma(\omega)$ la permutation obtenue.

À titre d'exemple, construisons $\sigma((B_0, N_0, B_1))$.

- Tirage 1 : B_0 On démarre avec la suite $(0, 1, 0)$.
- Tirage 2 : N_0 L'entier 2 ($k = 2$) s'insère au milieu de la première ($p = 0$) descente (la boule est noire) pour donner la nouvelle suite $(0, 1, 2, 0)$
- Tirage 3 : B_1 L'entier 3 s'insère au milieu de la deuxième montée pour donner $(0, 1, 3, 2, 0)$.

On obtient ainsi $\sigma((B_0, N_0, B_1)) = (1, 3, 2)$.

d. À l'aide de l'algorithme ci-dessus, construire la permutation de S_5 associée à l'issue $(B_0, B_0, N_1, N_0, B_2)$.

e. Réciproquement, soit σ l'élément de S_7 représenté par la suite $(7, 1, 3, 6, 5, 4, 2)$. Déterminer une issue ω comportant 7 tirages telle que $\sigma(\omega) = \sigma$.

f. À l'aide de la première question de cette sous-partie, comparer, pour une issue quelconque, le nombre de boules blanches dans la composition finale de l'urne au nombre de montées de la permutation qui lui est associée par l'algorithme ci-dessus.

On admet que l'application $\omega \mapsto \sigma(\omega)$ est bijective de Ω_n dans S_n et qu'elle induit une bijection entre l'évènement $(X_n = m)$ et l'ensemble des permutations de S_n ayant $m - 1$ montées.

g. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Déterminer, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $m \in [\![0, m-1]\!]$ le nombre $A_{n,m}$ de permutations de S_n ayant m montées.