À rendre pour le jeudi 23 janvier

DM NORMAL

PROBLÈME 1

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. On rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable à valeur dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \ldots, X_n$: si $k_1, \ldots, k_n$ sont les valeurs prises respectivement par $X_1, \ldots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$ pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]^n$.

Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note $\{X_1, \ldots, X_n\} = S$ la réunion des événements $(X_1, \ldots, X_n) = (k_1, \ldots, k_n)$ pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$.

1. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$ et $\ell \geq 2$.

- ***a.*** Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.
- ***b.*** Calculer $\mathbb{P}(U_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2)$.
- ***c.*** Calculer $\mathbb{E}(U_2)$.

2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.

- ***a.*** Écrire une fonction `simulU` qui renvoie une réalisation de U_{10}.
  On pourra utiliser la fonction `random.randint`.
  L'instruction `random.randint(1,25)` fournit un nombre aléatoire dans $[\![1, 25]\!]$ uniformément.
- ***b.*** Écrire une fonction `espU` qui renvoie une approximation de l'espérance de U_{10}. Quel théorème utilisez-vous pour justifier que le résultat de cette fonction est une approximation de l'espérance de U_{10} ? Enoncez précisément ce théorème.

3. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?

4. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?

5. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.

6. En déduire $\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.

7. Justifier

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right)$$

où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

8. En déduire dans le cas où $n \geq 3$:

$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - \mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n))$$

9. Exprimer $\mathbb{E}(U_n)$ en fonction de n et ℓ.

10. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et $n \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

11. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et $\ell \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

12. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

a. Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est à dire $\mathbb{E}(D_n)$.

b. Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME 2

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.
Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?

2. Calculer p_0, p_1 et p_2.

3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de Y_k.

5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Montrer que $R_p \geq 1$.

8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Calculer q_1 et q_2.

11. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et que $R_q \geq 1$.

12. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

13. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) g(x) = f(x) - 1.$$

14. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

15. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

17. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. On rappelle que l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un événement A est la variable aléatoire qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Quelle est, pour tout entier naturel non nul n, la loi de S_n ? Le jusitifier.
   (b) Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel non nul n, l'inégalité :
   $$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$
   (c) La fonction `poisson(l,n)` simule n lois de Poisson de paramètre l en renvoyant le résultat sous forme d'une matrice ligne à n colonnes (on aura besoin de `from numpy.random import *`). On pose $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Construire en PYTHON une fonction `Y(n,l)` qui simule la variable aléatoire Y_n.
   (d) À l'aide de `Y(n,l)`, comment estimer l'espérance de Y_n pour $n = 500$ et $\lambda = 1$?
2. Soit $(x, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mu < x$.
   On considère l'application ψ qui, à chaque réel $\theta \geqslant 0$, associe
   $$\psi(\theta) = \exp\left(\mu(\mathrm{e}^\theta - 1) - \theta x\right)$$
   (a) Montrer que la fonction ψ a un minimum sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa valeur.
   (b) Soit $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = n(\lambda + \varepsilon)$ et $\mu = n\lambda$.
   Justifier, dans ces conditions, l'existence d'une réel $a > 0$ (fonction de λ et ε mais pas de n) pour lequel $\min\limits_{\theta\geqslant 0} \psi(\theta) = \mathrm{e}^{-an}$.
3. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{g(x)+g(y)}{2}$.
   (a) Prouver, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \in [\![0, 2^n]\!]$, l'inégalité :
   $$g\left(\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y\right) \leqslant \frac{k}{2^n}g(x) + (1 - \frac{k}{2^n})g(y)$$
   On pourra raisonner par récurrence sur l'entier n, et observer que, si p est un entier, on a l'égalité : $\dfrac{2p + (2p + 2)}{2} = 2p + 1$.
   (b) On pose $D = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left\{\frac{k}{2^n}; k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$ et on considère un réel λ de $[0, 1]$.
   On note, pour tout entier naturel n, $d_n = \dfrac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$.
   Vérifier que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D, **croissante** et convergente vers λ.
   (c) On suppose, de plus, que la fonction g est croissante. Montrer qu'elle est convexe.
4. Soit X une variable aléatoire discrète possédant une espérance.
   (a) Rappeler l'inégalité de Markov.

(b) On suppose, de plus, la variable X à valeurs positives ou nulles. Établir, pour tout réel x, l'inégalité :

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \inf_{\theta>0} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X})}{\mathrm{e}^{\theta x}}$$

5. Soit X une variable aléatoire, **possédant une espérance** et telle que $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$. On note, pour tout entier naturel n, $\alpha_n = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[X\leqslant x_n]})$.
   (a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}(X)$.
   (b) Soit β la fonction qui, à chaque réel $K \geqslant 0$ associe : $\beta(K) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[X\leqslant K]})$.
   Prouver l'égalité : $\lim\limits_{K\to+\infty} \beta(K) = \mathbb{E}(X)$.
   On admet que ce résultat est valable pour toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.
6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ concave et décroissante. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Justifier l'existence d'une limite finie, négative ou nulle, à droite en x, pour la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)-f(x)}{u-x}$. On note θ_0 cette limite.
   (b) Prouver, pour tout réel u, l'inégalité : $f(u) \leqslant f(x) + \theta_0(u-x)$.
   (c) En déduire l'égalité
   $$\inf_{\theta\geqslant 0} \sup_{u\in\mathbb{R}} (f(u) + \theta(u-x)) = f(x),$$
   en ayant, pour tout réel θ, posé $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}} (f(u) + \theta(u-x)) = +\infty$ quand la fonction $u \mapsto f(u) + \theta(u-x)$ n'est pas majorée.
7. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$.
   (a) Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbb{P}(X > t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit r un entier naturel.
   Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbb{P}(X > x_k)$, puis l'égalité
   $$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{r} x_k\mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1}\mathbb{P}(X > x_r)$$
   (c) Prouver que la variable X a une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t$ converge et que, dans ce cas, on a l'égalité :
   $$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t$$
   On admet que ce résultat s'étend à toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.
8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ vérifiant :
   $$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, v_{m+n} \leqslant v_m + v_n$$
   (a) Justifier l'existence du nombre $\rho = \inf\left\{\dfrac{v_n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\rho \leqslant \dfrac{v_N}{N} < \rho + \varepsilon$.
   Soit $(k,r) \in \mathbb{N}^* \times [\![0, N-1]\!]$ et $n = kN + r$. Prouver l'inégalité $\dfrac{v_n}{n} \leqslant \dfrac{v_N}{N} + \dfrac{v_r}{n}$ et en déduire, pour tout entier n assez grand, l'encadrement $\rho \leqslant \dfrac{v_n}{n} \leqslant \rho + 2\varepsilon$.
   On en déduit ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n} = \rho$.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes, à valeurs **positives ou nulles**, indépendantes et suivant toutes la loi de X_1.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On suppose de plus que, pour tout réel t, $\mathbb{P}(X_1 > t) > 0$.

9. (a) Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Établir l'inégalité :

$$\mathbb{P}(S_{m+n} \geqslant mu + nv) \geqslant \mathbb{P}(S_m \geqslant mu)\mathbb{P}(S_n \geqslant nv)$$

   (b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel u, l'inégalité : $\mathbb{P}(S_n \geqslant nu) > 0$.

   (c) En déduire que, pour tout réel u, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln \mathbb{P}(S_n \geqslant nu)}{n} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\ln \mathbb{P}(S_n \geqslant nu)}{n}$.

   On utilisera la question **I-8**.

Partie II - Le théorème de Cramer

1. `Une inégalité`

   (a) Soit J une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément x de J, l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans J.

   Prouver que la partie J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que la fonction $\varphi : \theta \longmapsto \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1})$ est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{R}^-$.

   (c) On suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

   Déterminer l'intervalle I et la valeur de $\varphi(\theta)$ pour tout $\theta \in I$.

   (d) On suppose que X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

      i. Déterminer l'intervalle I et la valeur de $\varphi(\theta)$ pour tout $\theta \in I$.

      ii. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ pour lequel, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-an}$$

2. (a) Vérifier que la fonction $H : u \longmapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n} \ln \mathbb{P}(S_n \geqslant nu)$ est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est décroissante.

   (b) Prouver, pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité : $H\left(\dfrac{u+v}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}(H(u) + H(v))$.

   On utilisera **I-9**.

   (c) Qu'en déduit-on pour la fonction H ?

3. Soit $\theta \in I \cap \mathbb{R}^+$.

   (a) Justifier, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta S_n}) = \left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1})\right)^n$.

   (b) En déduire, pour tout réel u et pour tout entier naturel non nul n, l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geqslant \frac{1}{n} \ln\left(\mathrm{e}^{n\theta u}\mathbb{P}(S_n \geqslant nu)\right)$$

   (c) Conclure à l'inégalité : $\varphi(\theta) \geqslant \sup\limits_{u\in\mathbb{R}}(\theta u + H(u))$.

4. `Le cas d'égalité si` $\theta = 0$.

   Établir l'égalité : $\varphi(0) = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}} H(u)$.

`L'autre inégalité si` $\theta > 0$.

On suppose pour toute la fin du problème que $I \bigcap]0, +\infty[\neq \emptyset$.

On considère alors $\theta \in I$ tel que $\theta > 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Prouver l'existence de $k_0 > 0$ indépendant de n, tel que pour tout réel $K \geqslant k_0$ on ait l'égalité :

$$\ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1}\mathbf{1}_{[X_1 \leqslant K]})\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta S_n}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{[X_i \leqslant K]})\right)$$

   On suppose dans cette question **5** que $K \geqslant k_0$.

   (b) En déduire l'inégalité :

$$\ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1}\mathbf{1}_{[X_1 \leqslant K]})\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta S_n}\mathbf{1}_{[S_n \leqslant nK]})\right)$$

   (c) Établir l'inégalité :

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta S_n}\mathbf{1}_{[S_n \leqslant nK]}) \leqslant \int_0^{\exp(n\theta K)} \mathbb{P}(\mathrm{e}^{\theta S_n} > t)\mathrm{d}t$$

   (d) En déduire l'inégalité :

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta S_n}\mathbf{1}_{[S_n \leqslant nK]}) \leqslant 1 + n\theta\int_0^{K} \mathbb{P}(S_n > nu)\mathrm{e}^{n\theta u}\mathrm{d}u,$$

   puis l'inégalité :

$$\ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1}\mathbf{1}_{[X_1 \leqslant K]})\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(1 + n\theta K\exp(nM(\theta))\right),$$

   où l'on a posé $M(\theta) = \sup\limits_{u \in \mathbb{R}}(\theta u + H(u))$.

6. Prouver, pour tout réel K assez grand et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1}\mathbf{1}_{[X_1 \leqslant K]})\right) \leqslant \frac{\ln(2n\theta K)}{n} + M(\theta)$$

7. En déduire l'inégalité : $\varphi(\theta) \leqslant M(\theta)$.
   Il y a donc égalité via **3-(c)**.

8. Conclure, pour tout réel x à l'égalité :

$$\lim_{n \to +\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) = \inf_{\theta \geqslant 0}\left(\ln\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1}) - \theta x\right)$$

9. On rappelle qu'on suppose que $I \cap \mathbb{R}_+$ est d'intérieur non vide. Montrer que $\mathbb{E}(X_1) < +\infty$.
   On pose $\lambda = \mathbb{E}(X_1)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout entier naturel n assez grand, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \lambda + \varepsilon\right) \leq \mathrm{e}^{-na}$$