À rendre pour le mardi 4 février

DM NORMAL

1. Préliminaire : calcul d'une intégrale.
On considère dans cette partie les deux fonctions G et H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2} du \ ; \ H(x) = \left(\int_0^x \exp(-u^2) du \right)^2 .$$

a. Montrer que G et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées G' et H'. En déduire que la fonction $G + H$ est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\pi/4$.

b. Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq G(x) = \exp(-x^2) \int_0^1 \frac{\exp(-x^2u^2)}{1+u^2} du \leq \frac{\pi}{4} \exp(-x^2).$$

En déduire la limite de $G(x)$, puis de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis déterminer l'intégrale I définie par

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du.$$

Dans toute la suite du problème, on désigne par f une fonction à valeurs complexes continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et on étudie la fonction F (dite transformée de Fourier de f) définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t) dt.$$

On notera T l'application qui à f associe sa transformée de Fourier F.

2. Premières propriétés de la transformée de Fourier F de f.

a. Montrer que $F = T(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $F = T(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $F = T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

d. On munit l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ de la norme N_1 définie par :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ N_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

On munit l'espace vectoriel $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}$ de la norme N_∞ définie par :

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}),\ N_\infty(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Montrer que T est une application continue entre l'espace $L^1(\mathbb{R})$, muni de la norme N_1, et l'espace $C_b(\mathbb{R})$, muni de la norme N_∞.

3. Un premier exemple : la transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto 1/(1+t^2)$.

On suppose dans cette question et dans cette question seulement que f est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = T(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{1+t^2}dt.$$

a. Montrer que $T(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Établir à l'aide d'une intégration par parties la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \pi x F(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}dt \quad (1).$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |F(x)| \leq \frac{1}{\pi|x|}.$$

Déterminer la limite de F en $+\infty$ et $-\infty$.

c. Établir que l'intégrale figurant au membre de droite de l'égalité (1) de la question précédente est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.
En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que par dérivation de (1), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F(x) - xF'(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}dt \quad (2).$$

d. Établir à l'aide de la relation (2) que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, puis montrer que F vérifie $F'' - 4\pi^2 F = 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

e. Calculer $F(0)$ et, en tenant compte des limites de F en $+\infty$ et $-\infty$, en déduire l'expression de $F(x)$ (on pourra distinguer les deux cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$).

4. Dérivée de la transformée de Fourier et transformée de Fourier de la dérivée

On rappelle que f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

a. On suppose dans cette sous-question que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.
Comment généraliser ce résultat aux dérivées successives de F ?

b. On suppose dans cette sous-question que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ T(f')(x) = 2i\pi x T(f)(x)$.
Comment généraliser ce résultat aux dérivées successives de f ?

5. Un deuxième exemple : la transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto \exp(-\pi t^2)$.

On suppose dans cette question que f est la fonction $t \mapsto \exp(-\pi t^2)$. Ainsi :

$$F(x) = T(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt.$$

On pose $g : t \mapsto tf(t)$.

a. Montrer que $T(g)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que :

$$T(g) = -\frac{1}{2i\pi}\left(T(f)\right)'.$$

b. Montrer que $T(f')$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f')(x) = 2i\pi x T(f)(x).$$

c. En partant de la relation : $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -2\pi t f(t)$, déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par F.

d. Calculer $F(0)$, puis en déduire $F = f$.

e. En déduire $|||T|||$, avec T définit de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_b(\mathbb{R})$, munis des normes données dans la question **2.d.**.

6. Limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la transformée de Fourier F de f

On établit dans cette question que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

a. On considère une subdivision d'un segment $[-A, A]$, notée :
$-A = a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = A$ et une fonction en escalier ϕ définie sur $[-A, A]$, par $\phi(t) = \phi_k$ si t est dans $]a_{k-1}, a_k[$. Calculer alors l'intégrale suivante, puis déterminer sa limite quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$:

$$\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt}\phi(t)dt.$$

b.
i. Écrire une fonction en PYTHON qui renvoie `True` si une liste de réels est classée dans l'ordre strictement croissant et `False` sinon.

ii. Écrire en PYTHON une fonction qui à trois listes `[a_0,...,a_n]`, `[b_0,...,b_n]` et `[c_1,...,c_n]` associe la fonction en escalier ϕ telle que $\phi(a_i) = b_i$, pour $0 \leq i \leq n$ et $\phi(t) = c_i$, pour t dans $]a_{i-1}, a_i[$, pour $1 \leq i \leq n$.
On renverra un message d'erreur si la liste `[a_0,...,a_n]` n'est pas triée dans l'ordre croissant et on spécifiera que ϕ n'est pas définie en dehors de $[a_0, a_n]$.

c. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, A \geq A_\varepsilon \Rightarrow \left(\forall x > 0, \left|F(x) - \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt\right| \leq \varepsilon\right)$.

d. Jusitifier l'existence d'une fonction ϕ en escalier sur $[-A, A]$ telle que l'on ait :

$$\forall x \in [-A, A],\ |f(x) - \phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2A}.$$

e. En déduire que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

DM DIFFICILE

On note :
$C(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
$C_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $C(\mathbb{R})$.
$L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.
$L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.
Pour toute fonction f de $C_b(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.
Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t$.
Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$.
On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.
Soit f une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le support de f est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. On dit que f est à support compact si son support est un compact de $\mathbb{R}$; en d'autres termes, f est à support compact si et seulement s'il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.
Par définition, une approximation de l'unité est une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \\ \forall \varepsilon > 0, & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0 \end{cases}$$

I Produit de convolution

Soit $f, g \in C(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$$

La fonction $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g.

I.A - Généralités

1. Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et donner une majoration de $\|f * g\|_\infty$ pouvant faire intervenir $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

   a. $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C_b(\mathbb{R})$;
   b. $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

2. Soient $f, g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f * g(x)$ soit défini pour tout réel x. Montrer que $f * g = g * f$.

3. Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact.

I.B - Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction h de $C(\mathbb{R})$ et tout réel α, on définit la fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Dans cette sous-partie I.B, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

2. Pour tout réel α, montrer que $T_\alpha(f * g) = (T_\alpha(f)) * g$.

3. Pour tout réel α, montrer que $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$.

4. En déduire que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas où f est à support compact.

5. Montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas général.

I. C - Continuité, dérivabilité

1. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$.

- ***a.*** Montrer que $f * g$ est continue.
- ***b.*** Montrer que si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit k un entier naturel non nul. On suppose que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k, sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée d'ordre k.

I.D - Approximation de l'unité

Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$ et soit (δ_n) une suite de fonctions approximation de l'unité.

1. Montrer que la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si f est à support compact, alors la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout entier naturel n, on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$h_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n \, \mathrm{d}t$$

- ***a.*** Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.
- ***b.*** Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
- ***c.*** En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$.

5. Existe-t-il une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on ait $f * g = f$?

II Transformée de Fourier

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\hat{f}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}t.$$

Dans cette partie, on pourra utilser sans démonstration l'un des théroèmes de Fubini

- sur un rectangle :
Soient $[a,b], [c,d]$ deux segments de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ continue. Les intégrales ci-dessous ont un sens et :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

- sur $\mathbb{R}^2$:
soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ continue telle qu'il existe deux fonction u, v continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq u(x)v(y)$. Les intégrales ci-dessous ont un sens et :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \right) dy.$$

II.A

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\hat{f}$ appartient à $C_b(\mathbb{R})$.

II.B - Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

1. On suppose que g est bornée.

a. On pose $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|dt$ et $\varphi_n : x \mapsto \displaystyle\int_{-n}^{n} |f(t)g(x-t)|dt$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers φ.

b. En utilisant un théorème de Fubini, en déduire que :
$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \displaystyle\int_{-A}^{A} \varphi \leq \|f\|_1.\|g\|_1.$

c. Montrer que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On admet que } \int_{\mathbb{R}} f * g = \int_{\mathbb{R}} f \times \int_{\mathbb{R}} g.$$

d. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

2. ***Un contre-exemple***
Montrer qu'il existe deux fonctions f et g dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g(0)$ ne soit pas défini.

II.C - Sinus cardinal

On définit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction k_n par

$$\begin{cases} k_n(x) &= 1 - \dfrac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leq n \\ k_n(x) &= 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Exprimer la transformée de Fourier $\hat{k}_n(x)$ à l'aide de la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Justifier que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.
On admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = \pi$. On pose $K_n = \dfrac{1}{2\pi} \hat{k}_n$.

3. Montrer que la suite de fonctions $(K_n)_{n \geqslant 1}$ est une approximation de l'unité.

II. D - Inversion de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} k_n(x) \hat{f}(-x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}x$$

1. Montrer que I_n et $f * K_n$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, montrer que $I_n(t) = (f * K_n)(t)$.

3. En déduire, pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}x$$

III Convolution et codimension finie (SI VOUS AVEZ LE TEMPS)

Voici quelques définitions.

- Soit E un espace vectoriel. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires de E.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est de codimension finie s'il existe un sous-espace vectoriel G de E qui est de dimension finie avec $F \oplus G = E$. La codimension de F est $\dim(G)$ et on notera celle-ci $codim(F) = \dim(G)$.
  Sinon, on dit que F est de codimension infinie.
  On admettra l'unicité de la dimension d'un supplémentaire de F lorsqu'elle existe.

Dans cette partie, on suppose que $g \in C_b(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la codimension dans $L^1(\mathbb{R})$ du sous-espace vectoriel

$$N_g = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f * g = 0 \right\}$$

On note V_g l'espace vectoriel engendré par les fonctions $T_\alpha(g)$:

$$V_g = \operatorname{Vect}\left(T_\alpha(g)\right)_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

où, comme au I.B, on note $T_\alpha(g)$ la fonction $x \mapsto g(x - \alpha)$.

III.A

À toute fonction g de $C_b(\mathbb{R})$, on associe la forme linéaire φ_g sur $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(-t) \mathrm{d}t$$

Soit $(g_1, \ldots, g_p)$ une famille d'éléments de $C_b(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $(g_1, \ldots, g_p)$ est libre si et seulement si la famille $\left(\varphi_{g_1}, \ldots, \varphi_{g_p}\right)$ est libre.

2. Soit $(f_1, ..., f_p)$ une famille libre de E^*. Montrer que l'application $\psi : \left\{ \begin{array}{lll} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_p(x)) \end{array} \right.$ est surjective.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension infinie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de formes linéaires sur E. On note

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}(f_n)$$

Montrer que la codimension de K dans E est égale au rang de la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace dual E^* (on commencera par le cas où ce rang est fini).

On admet que ce résultat reste valable pour une famille non dénombrable

4. Montrer que la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$ est égale à la dimension de V_g.

5. **a.** Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et soit g la fonction définie par $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$.

b. Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe une fonction g de $C_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension n dans $L^1(\mathbb{R})$.

III. B - Hypothèse A

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On dit que g vérifie l'hypothèse A si g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, bornée et dont les fonctions dérivées à tout ordre sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que, si N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$ et si g vérifie l'hypothèse A , alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

III. C - Cas général

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On suppose que N_g est de codimension finie n dans $L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et des fonctions $m_1, \ldots, m_n$ d'une variable réelle telles que, pour tout réel α,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g)$$

2. Soit F un sous-espace de dimension finie, notée p, de $C(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in C(\mathbb{R})$ et pour tout réel x, on note $e_x(f) = f(x)$.

a. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_p$ tels que $\left(e_{a_1}, \ldots, e_{a_p}\right)$ soit une base de l'espace F^*

b. Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille d'éléments de F, montrer que $\operatorname{Det}\left(f_i\left(a_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est non nul si et seulement si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F.

3. En appliquant la question III.C.2) à V_g, montrer que si g est de classe C^k alors les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe C^k.

4. Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, $V_{h_r * g}$ est de dimension finie (les fonctions h_r sont celles de la question I.D.3).

5. Montrer que pour r assez grand la dimension de $V_{h_r * g}$ est égale à celle de V_g.

6. En déduire que les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe C^∞.

7. Montrer que pour $g \in C_b(\mathbb{R})$, si N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$, alors g vérifie l'hypothèse A de la question **III-B**.