à rendre pour le jeudi 13 février

DM NORMAL

EXERCICE

$\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de E et I_n la matrice unité de E. Pour M élément de E, M^T et $\operatorname{tr}(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de M et la trace de M.
Pour (i,j) élément de $\{1,2,\ldots,n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.
Soient A et B deux éléments fixés de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in E,\ f(M) = AMB$$

1. Soit C un élément de E. Calculer $CE_{i,j}$ et $E_{i,j}C$.
On suppose que pour tout M élément de E, $CM = MC$. Prouver qu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $C = aI_n$.

2. Pour M et N appartenant à E, on pose $< M|N >= tr(M^T N)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.

3. On note f^* l'adjoint de f. Montrer que :

$$\forall M \in E,\ f^*(M) = A^T M B^T$$

4. Dans cette question on veut déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit une isométrie vectorielle de E.

- ***a.*** Pour tout $M \in E$, déterminer $(f^* \circ f)(M)$.
- ***b.*** Montrer que f est une isométrie vectorielle si et seulement si $f^* \circ f = Id_E$.
- ***c.*** On suppose que f est une isométrie vectorielle de E.
  Prouver que les matrices $A^T A$ et BB^T sont inversibles et que l'une est l'inverse de l'autre.
  Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $A^T A = aI_n$.
- ***d.*** Démontrer que f est une isométrie vectorielle de E si et seulement s'il existe un réel $\lambda > 0$ et deux matrices Ω_1 et Ω_2 appartenant à $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A = \lambda \Omega_1 \ \text{ et } \ B = \frac{1}{\lambda}\Omega_2$$

PROBLÈME

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_n$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$. Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement $\| \cdot \|_n$ et $\| \cdot \|_p$.
On notera $(E_i)_{1\le i\le p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1\le j\le n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
$\mathrm{Ker}A$ est le noyau de A défini par $\mathrm{Ker}A = \{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \}$.
$\mathrm{Im}\,(A)$ est l'image de A définie par $\mathrm{Im}\,(A) = \{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}$.
Enfin, on adopte la notation $F^\perp$ pour désigner l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A^TA est nulle si et seulement si A est nulle.
Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.

2. Montrer que les matrices A^TA et AA^T sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

3. ***a.*** X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X \,|\, Y \rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

b. Si W est un vecteur propre de A^TA associé à la valeur propre λ, exprimer $\| AW \|_n^2$ en fonction de λ et $\| W \|_p$.

c. En déduire que les valeurs propres de A^TA sont réelles, positives ou nulles.

4. ***a.*** Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants :

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ A^T & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ A^T & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ A^T & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b. En déduire que les matrices A^TA et AA^T ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c. En déduire également que les matrices A^TA et AA^T ont même rang.

5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de AA^T et que si $n < p$, 0 est valeur propre de A^TA.

6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A^TA, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1, 2, \ldots, p\}$.
Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.
On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

a. Montrer que λ_1 est non nul.
On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1, 2, \ldots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de A^TA sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.
Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A^TA respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \ldots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \ldots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b. Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\mathrm{Ker}AA^T$ est égale à $n - r$.
Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \ldots, U_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}AA^T$.

c. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p, pour tout $i \in \{ r+1, \ldots, p \}$, $AV_i = 0$.

d. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $A^TU_i = \mu_i V_i$.

e. Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{ r+1, \ldots, n \}$, $A^TU_i = 0$.

f. En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de AA^T et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

7. On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le i$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le j$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $(U^T AV)_{i,j}$ l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne, j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $U^T AV$.

a. Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,p\},\ (U^T AV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \text{ où } \delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{array} \right. .$$

b. On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta V^T$.

La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c. Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. Montrer que le rang de A est égal à r.

9. ***a.*** Montrer que $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} V_i E_i^T$ et que $U = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} U_j{}^t F_j$.

b. En déduire :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^T \quad , \quad A^T A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i V_i^T \quad , \quad AA^T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i U_i^T$$

c. Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\mathrm{Ker} A$, $\mathrm{Ker} A^T$, $\mathrm{Im}\,(A)$, $\mathrm{Im}\,(A)^T$ à l'aide des U_j et des V_i.

d. Montrer que $\mathrm{Ker} A^T A = \mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Ker} AA^T = \mathrm{Ker} A^T$.

Notations.

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Si n est un entier positif, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, noté (X, Y) pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On note $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$ la norme associée. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On assimile $\mathbb{R}^n$ à l'espace des vecteurs colonnes d'ordre n et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à son algèbre d'endomorphismes. Ainsi, $(X, Y) = X^T Y$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{Tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux : $\operatorname{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
On rappelle que $\operatorname{Tr}(A)$ est égale à la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs ordres de multiplicité. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ et on définit $R(A) = \{X^T A X / \ X \in \mathbb{R}^n, \ \|X\| = 1\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

Les parties ainsi que les questions ne sont pas indépendantes.

I-Généralités.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A. Démontrer que les valeurs propres réelles de A sont dans $R(A)$.

I.B.

I.B.1) Démontrer que les éléments $a_{i,i}$ $(1 \leq i \leq n)$ de la diagonale de A sont dans $R(A)$.

I.B.2) En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que les éléments $a_{i,j}$ avec $i \neq j$ ne sont pas nécessairement dans $R(A)$.

I.C. On considère deux nombres réels $a \in R(A)$ et $b \in R(A)$, avec $a < b$. Soient X_1 et X_2 deux vecteurs de norme 1 tels que ${X_1}^T A X_1 = a$, ${X_2}^T A X_2 = b$.

I.C.1) Démontrer que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants.

I.C.2) On pose $X_\lambda = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$. Démontrer que la fonction
$\phi \ : \ \lambda \mapsto \dfrac{{X_\lambda}^T A X_\lambda}{\|X_\lambda\|^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

I.C.3) En déduire que le segment $[a, b]$ est inclus dans $R(A)$.

I.D. Démontrer que si $\operatorname{Tr}(A) = 0$ alors $0 \in R(A)$.

I.E. Soit Q une matrice orthogonale réelle. Démontrer que $R(A) = R(Q^T A Q)$.

I.F. On considère les conditions suivantes :

(C_1) $\operatorname{Tr}(A) \in R(A)$

(C_2) il existe une matrice orthogonale réelle Q telle que la diagonale de la matrice $Q^T A Q$ soit de la forme $(\operatorname{Tr}(A), 0, \ldots, 0)$.

I.F.1) Démontrer que la condition (C_2) entraine la condition (C_1).

I.F.2) On suppose que $x \in R(A)$. Démontrer qu'il existe une matrice Q_1 orthogonale telle que ${Q_1}^T A Q_1 = \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix}$ où B est une matrice de format $(n-1, n-1)$ $(B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}))$, C un vecteur colonne à $n - 1$ éléments $(C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}))$ et L un vecteur ligne à $n - 1$ éléments $(L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}))$.

I.F.3) Démontrer que si la matrice A est symétrique, il en est de même pour la matrice B ci-dessus.

I.F.4) Montrer que si A est symétrique, la condition (C_1) entraîne la condition (C_2).

II-Matrices symétriques de format $(2, 2)$.

Dans toute cette partie A et B désignent des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \leq \mu_2$) les valeurs propres de A (resp. B).

II.A. Démontrer que $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$.

II.B. On considère l'ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ défini par l'équation $(AX, X) = 1$.

a) Caractériser les conditions sur les λ_i pour lesquelles cet ensemble est vide ;

b) Donner un exemple pour lequel Γ est la réunion de deux droites ;

II.C. Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) \leq \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$. *On pourra utiliser une matrice orthogonale P telle que $P^T BP$ soit une matrice diagonale, pour obtenir $P^T AP = A' = (a'_{i,j})$ avec* $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a'_{1,1} + a'_{2,2}$.

II.D. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ et on suppose : $A \in S_2^+(\mathbb{R})$.

II.D.1) Démontrer que $a \geq 0$ et $d \geq 0$.

II.D.2) Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que

$$S \in S_2^+(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \left(\mathrm{Tr}(S) \geq 0 \text{ et } \det(S) \geq 0\right)$$

II.E. On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$. On suppose dans cette section que A et B sont dans $S_2^+(\mathbb{R})$.

II.E.1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que

$$b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1 a_2 d_1 d_2} - \sqrt{\det(A)\det(B)}$$

II.E.2) En calculant $\det(A+B) - \det(A) - \det(B)$, en déduire que

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)}$$

II.F. On suppose dans cette sous-partie que A et B sont dans $S_2^+(\mathbb{R})$, $\det(A)\det(B) \neq 0$ et $b_1 b_2 \neq 0$.

II.F.1) Démontrer que l'on a l'égalité dans la formule de la question II.E.2 si et seulement si les vecteurs (a_1, d_1) et (a_2, d_2) sont liés, ainsi que les vecteurs $(b_1, \sqrt{\det(A)})$ et $(b_2, \sqrt{\det(B)})$.

II.F.2) Démontrer alors que l'on a l'égalité dans la formule de la question II.E.2 si et seulement si les matrices A et B sont proportionnelles ($A = \lambda B$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$).

II.G. On considère la relation suivante sur l'ensemble des matrices symétriques réelles de format $(2, 2)$: on dit que $S \leq S'$ si et seulement si la matrice symétrique $S' - S$ vérifie $S' - S \in S_2^+(\mathbb{R})$. Démontrer que la relation $\leq$ ci-dessus est bien une relation d'ordre sur les matrices symétriques réelles de format $(2, 2)$.

II.H. On considère une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ avec $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$ qui est symétrique pour tout n. On suppose que la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée pour la relation d'ordre définie à la question précédente.

II.H.1) Démontrer que pour tout vecteur X ; la suite $(X^T A_n X)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée.

II.H.2) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ sont croissantes et majorées.

II.H.3) En considérant le vecteur $X = (1, 1)$, démontrer que la suite de matrices $(A_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est à dire que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$.

III-Matrices symétriques définies positives.

Dans cette partie toutes les matrices sont de format (n, n) où n est un entier ≥ 2.

III.A. Soit A une matrice symétrique définie positive. Démontrer qu'il existe une matrice inversible Y telle que $A = Y^T Y$.

III.B. Soient A une matrice symétrique définie positive et B une matrice symétrique. Démontrer qu'il existe une matrice inversible T telle que

$$T^T AT = I_n \text{ et } T^T BT = D$$

où D est une matrice diagonale (et I_n est la matrice identité).

III.C. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives.
Déduire de la question précédente que $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

III.D. Soient x un nombre réel strictement positif, β un nombre réel tel que $0 < \beta < 1$. Démontrer que $x^\beta \leq \beta x + 1 - \beta$.

III.E. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives, α et β deux nombres réels strictement positifs tels que $\alpha + \beta = 1$; démontrer que

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta.$$

III.F. Pour $1 \leq i \leq k$, soient A_i des matrices symétriques définies positives et α_i des réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Démontrer que

$$\det(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k) \geq (\det(A_1))^{\alpha_1} \ldots (\det(A_k))^{\alpha_k}.$$