à rendre pour le jeudi 6 mars

EXERCICE COMMUN À TOUS

On appelle *matrice de Hadamard* d'ordre n toute matrice H carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou -1 et telle que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}H$ soit orthogonale.

1. Montrer que $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de Hadamard si et seulement si $H^T H = nI_n$.

2. Donner des exemples de matrices de Hadamard d'ordre 1 et 2.

3. Questions de PYTHON.

- ***a.*** Écrire une fonction `Transposition(M)` qui prend en argument une matrice carrée M et renvoie sa transposé.
- ***b.*** Écrire une fonction `Hadamard(M)` qui prend en argument une matrice carrée M et renvoie `True` si c'est une matrice de Hadamard et `False` sinon.
- ***c.*** Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de Hadamard symétrique, alors la matrice $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ est encore une matrice de Hadamard.
- ***d.*** Écrire une fonction `Symetrique(M)` qui prend en argument une matrice M et qui renvoie `True` si M est symétrique et `False` sinon.
- ***e.*** Écrire une fonction `Duplication(M)` qui prend en argument une matrice M qui teste si c'est une matrice de Hadamard symétrique et qui renvoie $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ si elle l'est et qui renvoie une matrice nulle de même taille que $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ sinon.

4.
- ***a.*** Rappeler les propriétés sur les lignes et les colonnes d'une matrice orthogonale.
- ***b.*** Montrer que si H est une matrice de Hadamard alors toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de H est encore une matrice de Hadamard.

5. Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. En déduire que si $n \geq 2$ alors n est pair (on pourra regarder les deux premières lignes d'une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1).

6. Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4, alors n est multiple de 4. On pourra commencer par montrer que l'on peut supposer la première ligne de H uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1, puis on fera le lien entre les trois premières lignes.

Notations.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.
Dans tout le problème, on note n en entier naturel non nul et on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement des matices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A. Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on note A^{-1} sa matrice inverse.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace vectoriel de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. Une application $A : I \to F$ est continue (respectivement dérivable), lorsque pour t décrivant I, les coefficients de la matrice $A(t)$ sont des fonctions continues (respectivement dérivables) de I dans $\mathbb{K}$. On dira en abrégé que A est une matrice continue (respectivement dérivable) sur I et on notera $A(t) = (a_{i,j}(t))$ pour tout t dans I. Lorsque cette matrice est dérivable, on note $A'(t) = (a'_{i,j}(t))$ la matrice dérivée.
Pour deux matrices dérivables $M(t)$ et $N(t)$ dont le produit existe, on admettra la formule
$(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

Equations différentielles matricielles.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient A une matrice carrées d'ordre n continue sur I et B une matrice colonne à n lignes continues sur I, les coefficients des matrices A et B étant des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On considère l'équation différentielle $(E) \ : \ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ où les solutions $X(t)$ sont des matrices colonnes à n lignes dérivables sur I, dont les coefficients sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On note $(E_0) \ : \ X'(t) = A(t)X(t)$ l'équation différentielle homogène associée.
On dira que (E) et (E_0) sont des équations différentielles matricielles. On note S_0 l'ensemble des solutions de (E_0). On rappelle que :

- S_0 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ;
- les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à l'ensemble S_0 une solution particulière de (E) ;
- pour tout t_0 de I et pour toute matrice V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une solution et une seule X de (E) sur I vérifiant $X(t_0) = V$ (existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy).

On appelle système fondamental de solutions de (E_0), toute base $(X_1, \dots, X_n)$ de S_0.
On note $W(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ la matrice carrée d'ordre n dont les $X_j(t)$ sont les colonnes et on dit que $W(t)$ est la matrice wronskienne de ce système fondamental de solutions de (E_0).

Objectifs.

Dans la première partie, il faut résoudre un exemple d'équation différentielle matricielle à coefficients constants.
Dans la deuxième partie, on traite le cas général de l'équation différentielle matricielle (E) en définissant la matrice résolvante de (E_0).
Dans la troisième partie, on utilise les résultats de la deuxième partie pour résoudre une équation différentielle scalaire du second ordre.

1 Cas d'une matrice à coefficients constants.

On considère les équations différentielles :

$$(E) \ : \ X'(t) = AX(t) + B(t) \quad \text{et} \quad (E_0) \ : \ X'(t) = AX(t)$$

où A désigne une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $I = \mathbb{R}$.

1.1 Soient V un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que la matrice $X(t) = e^{\lambda t}V$ est une solution de (E_0) si et seulement si V est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

1.2 Un exemple.

On suppose $n = 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ -te^t \end{pmatrix}$.

1.2.1 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère l'équation différentielle (E_0). Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A. En déduire un système fondamental de solutions, puis la solution générale complexe de (E_0) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

1.2.2 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle $(E)\ :\ X'(t) = AX(t) + B(t)$.

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$.

Ecrire le système d'équations différentielles linéaires scalaires vérifié par les quatre fonctions $x_k(t)$.

Déterminer la solution générale réelle de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ (on pourra déterminer successivement $x_2(t)$ puis $x_3(t)$ puis $x_1(t)$ puis $x_4(t)$).

Préciser la solution X de (E) telle que $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 Matrice résolvante.

On reprend le cas général d'une équation différentielle $(E)\ :\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ définie dans la partie notations. On prendra I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t \in I$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note S_0 l'espace vectoriel de dimension n des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (E_0) associée.

Pour $t_0 \in I$ donné, on note Φ_{t_0} l'application de S_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall X \in S_0,\ \Phi_{t_0}(X) = X(t_0)$$

D'après le rappel sur le problème de Cauchy, l'aplication Φ_{t_0} est un isomorphisme de S_0 sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un système fondamental de solutions de (E_0).

2.1 Soient t_0 et t dans I. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $X \in S_0$ la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$. Justifier l'égalité $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}(V) = X(t)$.

2.2 On rapporte l'espace vectoriel S_0 à la base $(X_1, \ldots, X_n)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à sa base canonique $(C_1, \ldots, C_n)$.

2.2.1 Soit $t_0 \in I$. Prouver que la matrice, dans ce couple de bases, de l'application linéaire Φ_{t_0} de S_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice wronskienne

$$W(t_0) = (X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0))$$

2.2.2 Soient t_0 et t dans I. On note $R(t, t_0) = W(t)W(t_0)^{-1}$. Prouver que la matrice $R(t, t_0)$ ne dépend pas du système fondamental $(X_1, \ldots, X_n)$ de solutions choisi.

La matrice $R(t, t_0)$ s'appelle la résolvante de l'équation différentielle linéaire (E_0).

2.3 Propriétés de la résolvante.

Soient t, t_0, t_1 et t_2 dans I.

2.3.1 Pour simplifier, on note $R'(t, t_0)$ la dérivée par rapport à t de la matrice $R(t, t_0)$. Montrer que $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$. En déduire que, pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la matrice $X(t) = R(t, t_0)V$ est la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$.

2.3.2 Montrer que $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$. En déduire que $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$.

2.4 Application de la résolvante : recherche d'une solution particulière de (E).

Soient t et t_0 dans I. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$X(t) = R(t, t_0)V(t)$$

où $V : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application dérivable à déterminer.

2.4.1 On suppose dans cette question et la suivante que $X(t) = R(t, t_0)V(t)$ est une solution de (E). Montrer que

$$R(t, t_0)V'(t) = B(t)$$

2.4.2 En déduire que $V(t) = X(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)\, du.$

2.4.3 Montrer que $Y(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t, u)B(u)\, du$ est une solution particulière de (E).

3 Une application de la résolvante

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1 On considère l'équation différentielle

$$(e_0) \; : \; t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 0$$

où $y = y(t)$ est une fonction deux fois dérivable définie sur un intervalle I.

3.1.1 En cherchant les polynômes solutions de (e_0) sous la forme $y(t) = a_m t^m + \cdots + a_0$ avec $a_m \neq 0$, déterminer le degré de ces polynômes puis déterminer tous les polynômes solutions de (e_0) sur $\mathbb{R}$. Préciser le polynôme P solution de (e_0) et vérifiant $P(0) = 1$.

3.1.2 Vérifier que la fonction $Q(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2}$ est solution de (e_0) sur l'intervalle $]-1, 1[$.

3.1.3 On cherche les solutions non nulles de (e_0) développables en série entière : $y(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ pour $|t| < R$ où $R > 0$ est le rayon de convergence de la série.

3.1.3.1 Pour tout entier naturel k, écrire, selon les valeurs de k, les relations entre a_k et a_{k+1}. Déterminer le rayon de convergence R.

3.1.3.2 Montrer qu'il existe un entier non nul k_0 à déterminer, tel que pour $k \geq k_0$, le coefficient a_k s'exprime en fonction de a_{k_0}. Donner l'expression de a_k en fonction de a_{k_0}. Comment retrouve-t-on les fonctions P et Q parmi ces solutions ?

3.2 On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \; : \; y'' + a(t)y' + b(t)y = \varphi(t)$$

où a, b, φ sont des fonctions continues définies sur un intervalle I.

3.2.1 On définit la fonction z par $z(t) = y'(t)$ et on note $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice carrée $A(t)$ et une matrice colonne $B(t)$ telle que l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ s'écrive matriciellement sous la forme $(E) \; : \; X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

3.2.2 On note (f, g) une base de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0) \; : \; y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Les matrices $\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ forment alors un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $(E_0) \; : \; X'(t) = A(t)X(t)$.

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}$ la matrice wronskienne de ce système fondamental de solutions.

Pour t et t_0 dans I, on note en abrégé f pour $f(t)$, f_0 pour $f(t_0)$, g pour $g(t)$, g_0 pour $g(t_0)$, f' pour $f'(t)$, f'_0 pour $f'(t_0)$, g' pour $g'(t)$ et g'_0 pour $g'_0(t_0)$.

Exprimer les coefficients de la matrice $W(t_0)^{-1}$ en fonction de f_0, g_0, f'_0, g'_0 puis ceux de la matrice résolvante en fonction de $f, f_0, g, g_0, f', f'_0, g', g'_0$.

3.3 On considère l'équation différentielle

$$(e) \ : \ t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 20t^4$$

et on prend $I =]0,1[$.

3.3.1 Ecrire l'équation différentielle (e) sous la forme de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ de la question **3.2**.

En déduire les matrices $A(t)$ et $B(t)$ telles que l'équation différentielle (e) s'écrive matriciellement sous la forme $(E) \ : \ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

3.3.2 On applique les résultats de la question **3.2** avec $f(t) = P(t)$ et $g(t) = Q(t)$, où P et Q sont les fonctions définies dans **3.1**. Pour t et u dans $]0,1[$, expliciter le déterminant de $W(u)$ et la valeur de $Q(t)P(u) - P(t)Q(u)$.

3.3.3 Soient t et t_0 dans $]0,1[$. En appliquant les résultats précédents de cette partie et de la partie **2**, montrer que la fonction

$$y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^{t} (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4) \, du$$

est une solution particulière de (e).

Montrer que cette solution est encore valable pour $t_0 = 0$.

Expliciter la solution générale de (e) sur $[0,1[$. Quelles sont les solutions de (e) sur $[0,1[$ qui vérifient $y(0) = y'(0) = 0$?

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de certaines équations différentielles sur $\mathbb{R}$ du type suivant :

$$(E) \qquad y''(t)+\varphi(t)y(t)=0.$$

Première partie

L'objet de cette première partie est l'étude sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_1) \qquad y''(t)+e^{it}y(t)=0.$$

1. **Caractérisation d'une solution périodique**
Démontrer qu'une fonction f, définie sur toute la droite réelle, solution de l'équation différentielle (E_1), est 2π-périodique si et seulement si elle prend, ainsi que sa dérivée f', les mêmes valeurs en 0 et en 2π :

$$f(0)=f(2\pi), \quad f'(0)=f'(2\pi).$$

2. **Construction d'une solution périodique**

On cherche une solution de (E_1) sous la forme $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, avec $(c_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

- ***a.*** Donner une condtion suffisante sur les (c_n) pour que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- ***b.*** Déterminer une solution non nulle et 2π-périodique de (E_1).

3. **Inégalité vérifiée par la fonction f et sa dérivée**

Soit f une solution 2π-périodique de (E_1).

- ***a.*** Soient $t\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}_+^*$. Établir une majoration du module des deux nombres complexes C et D, définis ci-dessous par les relations :

$$C=f(t+h)-f(t)-hf'(t), \qquad D=f(t-h)-f(t)+hf'(t)$$

en fonction de la norme de la convergence uniforme de la fonction f : $\|f\|_\infty=\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|$.

- ***b.*** En déduire que :

$$\|f'\|_\infty \le \sqrt{2}\|f\|_\infty.$$

Deuxième partie

Soit q une fonction réelle de la variable réelle t, continue et périodique de période $T>0$,

$$\forall t\in\mathbb{R}, q(t+T)=q(t).$$

Soit λ un nombre complexe. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$x''+(\lambda-q(t))x=0 \tag{1}$$

où x est une fonction complexe, de classe $\mathcal{C}^2$, de la variable t.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation (1). Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel complexe.

2. Soient x_1 et x_2 deux solutions de (1). On pose $W(x_1,x_2)=x_1x_2'-x_1'x_2$. Montrer que $W(x_1,x_2)$ est indépendant de t.

3. Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur de translation par T qui, à une fonction complexe f, associe la fonction $\mathcal{T}(f)$ telle que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{T}(f)(t) = f(t+T).$$

a. Montrer que, si $f \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{T}(f) \in \mathcal{E}$.

b. On désigne par τ la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{E}$. Est-ce un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$?

4. **a.** Montrer qu'il existe une unique solution x_1 de (1) telle que
$$x_1(0) = 1,\ x_1'(0) = 0,$$
et une unique solution x_2 de (1) telle que :
$$x_2(0) = 0,\ x_2'(0) = 1.$$

b. Montrer que x_1 et x_2 forment une base de $\mathcal{E}$.

5. On désigne par M la matrice de l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ dans la base (x_1, x_2).

a. Montrer que $M = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) \end{pmatrix}$.

b. Évaluer $\det M$.

On pose $\Delta = \dfrac{1}{2}\operatorname{Tr} M$ où Tr désigne la trace.

c. Évaluer Δ en fonction de $x_i(T)$, $x_i'(T)$ $(i = 1, 2)$.

6. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ sont racines du trinôme $P(\rho) = \rho^2 - 2\Delta\rho + 1$.

Soit $x \in \mathcal{E}$. On dit que x est *stable* si $|x|$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On dit que x est *fortement stable* si $\lim\limits_{x \to +\infty} x(t) = 0$.

7. On suppose Δ *réel* et $|\Delta| \neq 1$.

a. Montrer que $\mathcal{E}$ est somme directe des sous-espaces propres de τ.

b. Montrer que, si $|\Delta| < 1$, toutes les solutions de (1) sont stables. Les fonctions propres de τ sont-elles fortement stables dans ce cas ?

c. Montrer que, si $|\Delta| > 1$, il existe une solution de (1) fortement stable. Est-elle unique ? Existe-t-il dans ce cas des solutions stables mais non fortement stables ?

8. On suppose que $\Delta = \varepsilon$, où $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.

a. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{E}$ dans laquelle la matrice de τ est $\begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe.

b. On suppose $a \neq 0$. Montrer que, dans ce cas, il existe une solution de (1) stable mais non fortement stable. Existe-t-il des solutions fortement stables ?

Troisième partie

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Soit g la fonction somme de la série entière de terme général $u_n(x)$, définie dans l'intervalle de convergence de cette série par la relation suivante :
$$g(x) = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}$$

Le but de cette partie est l'étude de la fonction g.

1. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n(x)$.

2. **Signe de la fonction** g

Quelle est le signe de la fonction dérivée g', sur le segment $[0, 2]$? En déduire qu'il existe un réel x_0 tel que la fonction g est positive sur l'intervalle semi-ouvert $[0, x_0[$ et négative sur l'intervalle semi-ouvert $]x_0, 2]$. Démontrer l'inégalité $x_0 > \sqrt{2}$ (prendre $\sqrt{2} = 1,41$).

Quatrième partie

Le but de cette partie est d'étudier les zéros des solutions de l'équation différentielle suivante

$$(E_2) \qquad y''(t) + e^t y(t) = 0.$$

Dans toute cette partie y désigne une solution réelle de l'équation différentielle (E_2).

1. **Zéros de la fonction** y

a. Préciser la fonction y lorsqu'il existe un réel α tel que la fonction y et sa dérivée sont nulles en ce point α : $y(\alpha) = 0, y'(\alpha) = 0$.

b. Soient a et b deux réels $(a < b)$ et z une solution réelle de l'équation différentielle suivante :

$$(F) \qquad z''(t) + e^a z(t) = 0.$$

La fonction z est supposée s'annuler en deux points α et β de l'intervalle $[a, b]$ $(a \leq \alpha < \beta \leq b)$ et être strictement positive sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$. Soit y une solution de l'équation différentielle (E_2).
Soit **H** l'hypothèse : « la fonction y est strictement positive sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ ».
Soit W la fonction définie sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ par la relation suivante :

$$W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$$

Étudier les variations de la fonction W sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$; en déduire que l'hypothèse **H** formulée ci-dessus est fausse.

En conclure que, pour toute solution réelle z de l'équation différentielle (F), entre deux zéros consécutifs de la fonction z dans $[a, b]$, se trouve au moins un zéro de la fonction y.

c. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel τ, toute solution y réelle de l'équation différentielle (E_2) a au moins un zéro dans l'intervalle

$$\left[\tau, \tau + \pi \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right].$$

2. **Espacement des zéros de la fonction** y

Soit y une solution réelle de l'équation différentielle (E_2), différente de la solution nulle.

a. Soit τ un zéro de la fonction y ; démontrer qu'il existe un intervalle ouvert$]\tau, \tau + c[$ (où c est un réel strictement positif) sur lequel la fonction y ne s'annule pas.

b. Soient deux zéros consécutifs α et β de la fonction y. Démontrer, en considérant une solution réelle z de l'équation différentielle suivante :

$$(G) \qquad z''(t) + e^{\beta} z(t) = 0,$$

que les réels α et β vérifient l'inégalité suivante :

$$\beta - \alpha \geq \pi \exp\left(-\frac{\beta}{2}\right).$$

Cinquième partie

L'objet de cette partie est de construire une fonction Ψ solution de l'équation différentielle (E_2).

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur la droite réelle par la relation :

$$v_n(t) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}.$$

Lorsque la série de fonctions de terme général v_n est convergente, soit Ψ la fonction somme de cette série :

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}.$$

1. **La fonction Ψ est solution de l'équation différentielle (E_2)**

- ***a.*** Établir que, pour tout réel a, la série de terme général $v_n(t)$ est uniformément convergente sur la demi-droite $]-\infty, a]$.
- ***b.*** Démontrer que la fonction Ψ est une solution de l'équation différentielle (E_2) définie sur toute la droite réelle.

2. **Zéros de la fonction Ψ**

Démontrer, en utilisant des résultats des deuxième et troisième parties, que les zéros de la fonction Ψ constituent une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels :

$$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$$

telle que :

$$\frac{\ln(2)}{2} < t_0, \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0.$$

Sixième partie

Le but de cette partie est d'établir des majorations des fonctions solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$$

1. **Une inégalité**

Soient M un réel strictement positif ($M > 0$) et a un réel. Soient f et g deux fonctions positives, définies et continues sur la demi-droite $[a, +\infty[$, telles que, pour tout réel t de la demi-droite $[a, +\infty[$, l'inégalité ci-dessous ait lieu :

$$f(t) \le M + \int_a^t f(x)g(x)dx.$$

Établir, en considérant par exemple la fonction F, définie sur la demi-droite $[a, +\infty[$ par la relation :

$$F(t) = \int_a^t f(x)g(x)dx$$

la propriété :

$$f(t) \le M \exp\left(\int_a^t g(x)dx\right).$$

Dans la suite le réel a est strictement positif ($a > 0$) ; soit y une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, +\infty[$, vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$$

où φ est une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, +\infty[$, telle que la fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur la demi-droite $[a, +\infty[$.

2. **Majoration de la fonction $|y(t)|/t$**

a. Déterminer une fonction affine $A : t \mapsto A(t)$, définie sur la demi-droite $[a, +\infty[$, telle que, pour tout réel t de cette demi-droite, la relation ci-dessous ait lieu :

$$y(t) = A(t) - \int_a^t (t - x)y(x)\varphi(x)dx$$

b. Démontrer que la fonction j définie par la relation

$$j(t) = \frac{y(t)}{t}$$

est bornée lorsque le réel t croît vers l'infini. C'est-à-dire : il existe deux réels strictement positifs C et D tels que, pour tout t supérieur ou égal à $C (t \geq C)$, il vienne : $|y(t)| \leq Dt$.

3. **Limites de $y'(t)$ et de $y(t)/t$**

a. Démontrer, en utilisant les résultats précédents que la fonction dérivée $y' : t \mapsto y'(t)$ a une limite lorsque le réel t croît vers l'infini ; soit ℓ cette limite :

$$\ell = \lim_{t \to \infty} y'(t).$$

b. En déduire que l'expression $j(t) = \dfrac{y(t)}{t}$ a pour limite ℓ lorsque le réel t croît vers l'infini.