À rendre entre le mardi 18 mars et éventuellement le jeudi 20 mars pour le DM difficile

DM NORMAL

EXERCICE 1

On considère la fonction $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2\int_0^{xy}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{array}\right.\end{array}\right.$.

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, montrer les trois inégalités suivantes :

a. $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$; ***b.*** $0\leq\dfrac{1}{\sqrt{1+(xy)^4}}\leq 1$; ***c.*** $\left|\displaystyle\int_0^{xy}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right|\leq|xy|$.

2. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Calculer pour $(x,y)\neq(0,0)$: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$.

4. φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 2

Dans ce problème on considère les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\neq 0$.

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

1. ***a.*** Montrer qu'une telle fonction f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$ si et seulement s'il existe une fonction réelle a, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=a(x)f(x,y).$$

b. En déduire que les solutions de $(\mathcal{E})$ ne s'annulant pas sont exactement les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto\varphi(x)\psi(y)$, où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Pour une telle solution f de $(\mathcal{E})$, y-a-t-il unicité du couple (φ,ψ) ?

c. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et telles que $g(0)=h(0)$.
Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathcal{E})$ ne s'annulant pas et telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x,0)=g(x)\quad\text{et}\quad\forall y\in\mathbb{R},\ f(0,y)=h(y).$$

2. Dans cette question, f désigne une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^2$ strictement positive.

a. Montrer que f présente en (x_0,y_0) un maximum local si et seulement si les fonctions $x\mapsto f(x,y_0)$ et $y\mapsto f(x_0,y)$ présentent respectivement en x_0 et en y_0 un maximum local.

b. En déduire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f présente un maximum local est de la forme $A\times B$, où A et B sont des parties de $\mathbb{R}$ à préciser.

3. Soit maintenant la fonction $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ F(x,y)=(xy)^3+|xy|^3$.

a. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra montrer d'abord que $h : t \mapsto t^3 + |t|^3$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$).

b. Démontrer que F vérifie l'équation $(\mathcal{E})$.

c. Montrer qu'il n'existe pas de fonctions φ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x, y) = x\,e^{x\left(y^2+1\right)}$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2. **a.** Déterminer les dérivées partielles premières de f

b. En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.

3. **a.** Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

b. Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.

4. **a.** Montrer que : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x, y) \geq x\,e^x$.

b. En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = x\,e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE

Notations.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note alors $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, E)$) l'ensemble des applications continues (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.
Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul, et l'on munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire de x et y, et $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$, la norme associée.
La notation $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Lorsque $n = m$, on utilise également la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices *inversibles* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 est notée I_n. L'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice carrée A est noté $Sp(A)$. Le polynôme $\det(XI_n - A)$ est appelé *polynôme caractéristique* de A.
On identifie une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ à l'application linéaire de matrice A par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et de $\mathbb{K}^n$.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ a pour coefficients $a_{i,j}$, la matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de coefficients $b_{i,j} = a_{j,i}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ est appelée transposée de A, et notée A^T. On identifie un vecteur colonne (resp. ligne) de $\mathbb{R}^n$ à une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$). En particulier, pour $x \in \mathbb{R}^n$, la notation x^T désigne le vecteur ligne de mêmes composantes que x. Par conséquent, on a $(x|y) = y^T x$ pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}^n$.
On appelle *norme matricielle* une norme $|||.|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ |||AB||| \leq |||A|||\,.\,|||B|||$$

On se donne une paire (A, B) constitué d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (avec éventuellement $m \neq n$). A cette paire, on associe une famille d'équations différentielles :

$$(C) \qquad X' = AX + Bu(t)$$

où la fonction (a priori inconnue) u appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$. Cette fonction u est appellée *contrôle*.
On s'intéresse au *problème de commandabilité* associé à la paire (A, B). Plus précisément, étant donné un temps $T > 0$ et un vecteur $x_T \in \mathbb{R}^n$, on cherche à déterminer s'il existe un contrôle $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ tel que l'unique fonction $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ de (C) nulle en 0 vérifie $\Phi(T) = x_T$. Si un tel contrôle existe, on dit que l'état x_T est *atteignable* en temps T. On note $\mathcal{A}_T$ l'ensemble des états atteignables en temps T.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ alors

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^n \\ t & \mapsto & e^{tA} \left(x + \displaystyle\int_0^t e^{-\tau A} f(\tau)\, d\tau \right) \end{array} \right.$$

est l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ de

$$X' = AX + f(t),\ X(0) = x.$$

2. Montrer que $\mathcal{A}_T$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3. Soit $x_T \in \mathcal{A}_T$ et u un contrôle amenant l'état nul à $t = 0$ à l'état x_T au temps T. Montrer que l'on a

$$x_T = \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)\, ds$$

4. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{R})$ la matrice par blocs définie par

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

On note $Im(C) = \{CZ / \ Z \in \mathbb{R}^{nm}\}$.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est combinaison linéaire de la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

b. En déduire que $\mathcal{A}_T \subset Im(C)$.

5. On rappelle que si $F \subset \mathbb{R}^n$, alors $F^\perp$ désigne $\{x \in \mathbb{R}^n / \ \forall y \in F, \ (x|y) = 0\}$.

a. Soit $y \in \mathcal{A}_T^\perp$. Montrer que

$$\int_0^T y^T e^{(T-s)A} B B^T e^{(T-s)A^T} y \, ds = 0.$$

b. En déduire que $y \in Im(C)^\perp$ puis montrer que $\mathcal{A}_T = Im(C)$.

c. L'ensemble $\mathcal{A}_T$ dépend-il de T ?

6. On dit que la paire (A, B) est *commandable* en temps T si tout état est atteignable en temps T (i.e. $\mathcal{A}_T = \mathbb{R}^n$).

a. Montrer que la paire (A, B) est commandable en temps T si et seulement si le rang de C est n.

b. Montrer qu'une paire commandable en temps T est aussi commandable en temps T' pour tout $T' > 0$.

c. Donner un exemple de paire non commandable.

7. On pose $D = \displaystyle\int_0^T e^{(T-s)A} B B^T e^{(T-s)A^T} \, ds$.

a. Montrer que D est une matrice carrée symétrique de taille n, et que $Im(D) \subset \mathcal{A}_T$.

b. Montrer que $Ker(D) \subset \mathcal{A}_T^\perp$.

c. Montrer que, pour toute matrice symétrique M, on a $Im(M)^\perp \subset Ker(M)$.

d. En déduire que $\mathcal{A}_T = Im(D)$.

8. Dans toute cette question, on suppose que la paire (A, B) est commandable.

a. Justifier l'inversibilité de D.

b. Soit $x_T \in \mathbb{R}^n$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $v(s) = B^T e^{(T-s)A^T} D^{-1} x_T$. Montrer que le contrôle v envoie l'état nul à $t = 0$ sur l'état x_T au temps $t = T$.

c. Montrer que pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ transformant l'état nul à $t = 0$ en l'état x_T au temps T, on a

$$\int_0^T (v(s) | u(s) - v(s)) \, ds = 0$$

d. En déduire que le contrôle v est celui qui minimise l'énergie : pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ amenant 0 à x_T en temps T, on a

$$\int_0^T \|v(s)\|^2 \, ds \leq \int_0^T \|u(s)\|^2 \, ds$$

avec égalité si et seulement si $u = v$.

Dans tout le problème, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est coercive si et seulement si elle est continue et vérifie

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

où la norme de x correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
L'objectif du problème est d'étudier certains exemples de fonctions coercives, de montrer en particulier qu'elles possèdent toujours un ou plusieurs minimum global et d'en étudier des méthodes d'approximation. Le préambule contient un résultat utilisé tout au long du problème. Les quatre parties sont assez largement indépendantes.
On note $(.,.)$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$ et pour toute fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\nabla f(x)$ le vecteur gradient de f au point x formé des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Préambule.

1. Soit f une fonction coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que si $\|x\| > M$ alors

$$f(x) \geq |f(0)| + 1$$

2. En déduire qu'il existe un élément $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x^*) \leq f(x)$$

On dit alors que x^* est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

3. On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de $\nabla f(x^*)$?

Partie 1.

Dans cette partie, on considère la fonction g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

où $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique telle que

$$\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,\ (Ax, x) \geq C\|x\|^2$$

4. Montrer que g est coercive.

5. Montrer que g est de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et que

$$\nabla g(x) = Ax - b$$

En déduire que g possède un unique minimum global noté x^*.

6. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = u_k - \alpha\nabla g(u_k)$$

où α est un réel positif fixé. Montre que

$$u_{k+1} - x^* = (I_3 - \alpha A)(u_k - x^*)$$

7. On note L la plus grande valeur propre de A (en valeur absolue). Montrer que si $\alpha \in \left]0, \dfrac{2}{L}\right[$, alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x^*.

Partie 2.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$D_x = \{d \in \mathbb{R}^n,\ \|d\| = 1 \ \text{ et } \ (d, \nabla f(x)) < 0\}$$

8. Montrer que D_x est non vide si $\nabla f(x) \neq 0$ et que si $d \in D_x$, alors

$$T_{d,x} = \{t \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x+td) < f(x)\}$$

est également non vide.

On considère une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$x_0 \in \mathbb{R}^n \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = x_k + t_k d_k \tag{1}$$

avec

$$\begin{cases} d_k \in D_{x_k} \ \text{ et } \ t_k \in T_{d_k,x_k} \ \text{ si } \ \nabla f(x_k) \neq 0 \\ d_k = 0 \ \text{ et } \ t_k = 0 \ \text{ si } \ \nabla f(x_k) = 0 \end{cases}$$

On dit alors que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction f.

9. Dans le cas général, montrer que si f est de plus une fonction coercive, alors la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

10. On reprend dans cette question les notations et définitions de la partie 1. Montrer que lorsque α appartient à un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$ qu'on déterminera, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction g. On pourra commencer par montrer que

$$g(u_{k+1}) - g(u_k) = -\alpha\|r_k\|^2 + \frac{1}{2}\alpha^2(Ar_k, r_k)$$

avec $r_k = \nabla g(u_k)$.

Partie 3.

Dans toute cette partie, f désigne une fonction de classe C^1, coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de descente par gradient pour la fonction f (c'est à dire définie par la relation (1) de la partie 3).

11. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie de plus la condition suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + m_1 t_k(d_k, \nabla f(x_k)) \tag{2}$$

où m_1 est un réel fixé dans $]0,1[$.
Montrer que pour toute suite de descente par gradient vérifiant la condition (2), les sommes partielles de la série de terme général $(t_k(d_k, \nabla f(x_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est minorée puis que

$$\lim_{k\to+\infty} t_k(d_k, \nabla f(x_k)) = 0$$

12. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de descente par gradient vérifie la condition (2) et la condition supplémentaire suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ t_k \geq \min(C_1, C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|) \tag{3}$$

où C_1 et C_2 sont deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} (d_k, \nabla f(x_k)) = 0$$

13. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de descente par gradient vérifie les conditions (2), (3) et que si $\nabla f(x_k) \neq 0$,

$$d_k = -\frac{B\nabla f(x_k)}{\|B\nabla f(x_k)\|}$$

où B est une matrice symétrique de taille n dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \nabla f(x_k) = 0$$

14. On suppose dans cette question et la suivante que $n = 1$ et de plus que f est coercive, de classe C^2 et strictement convexe, c'est à dire que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Montrer que f possède un unique minimum global x^* sur $\mathbb{R}$.

15. Les hypothèses de la question précédente sont conservées. À partir d'un réel x_0 quelconque, on construit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de descente par gradient pour la fonction f qui vérifie les conditions (2) et (3). Montrer qu'une telle suite est convergente vers l'unique minimum global de f.