Séance du 17/05 : Algèbre linéaire

Ex 1 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AMB = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en calculer la dimension.

Ex 2 : [Centrale] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini $n \geq 1$ et $\varphi_1, .., \varphi_p, \psi$ des formes linéaires sur E telles que $(\varphi_1, .., \varphi_p)$ soit libre. On considère les propositions suivantes :
i) $\psi \in vect(\varphi_1, .., \varphi_p)$
ii) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_k \subset \operatorname{Ker} \psi$
iii) $\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E,\ |\psi(x)| \leq C \max\limits_{1 \leq k \leq p} |\varphi_k(x)|$.

1. Montrer les implications évidentes.

2. En montrant que $\theta : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), ..., \varphi_p(x)) \in \mathbb{C}^p$ est surjective, montrer que ii) implique i).

3. En considérant un supplémentaire de $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_k$, montrer que ii) implique iii).

Ex 3 : [Mines] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $vect(u, v)$ possède un élément bijectif. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0\}$.

2. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

3. Montrer que la réciproque de la première question est vraie si u et v commutent.

Ex 4 : [Mines] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(u^2) \leq n$.

2. Montrer que $2\operatorname{rg}(u^2) \leq \operatorname{rg}(u)$.

Ex 5 : [Centrale] Soient E est un espace de dimension finie et $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ un sous-groupe fini de $GL(E)$.

1. Montrer que si p est un projecteur, $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

2. Montrer que $f_i(g) = g \circ g_i$ est une permutation de G.

3. Montrer que $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} g$ est un projecteur.

4. En déduire que $\dim \left(\displaystyle\bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - Id) \right) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} tr(g)$.

Ex 6 : [Mines] Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -Id$.

1. Montrer que si $a \neq 0$, $\big(a, f(a)\big)$ est libre ; on pose $F(a) = vect\big(a, f(a)\big)$.

2. Montrer qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F(a_i)$.

3. En déduire que E est de dimension paire et trouver une base dans laquelle la matrice de f est simple.

Ex 7 : [Mines] Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{U}_5$?

Séance du 19/05 : Intégration

Ex 8 : [Centrale] Le but de cet exercice est de montrer que π est irrationnel.

1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $v = Id_E + u$ est un automorphisme et déterminer v^{-1}.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'' + Q = P$.
   Si P est dans $\mathbb{Z}[X]$ et divisible par X^n, montrer que : $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $n!|Q(0)$.
3. On suppose que $\pi = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (p - qX)^n X^n$ et Q_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q_n'' + Q_n = P_n$. En considérant $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^\pi P_n \sin$, démontrer le résultat annoncé.

Ex 9 : [Centrale]

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)dt = I$.
3. Montrer l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma$.
4. Lier γ et I.
5. Étudier le signe de I.

Ex 10 : [Mines] Domaine de définition et calcul de $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}dt$.

Ex 11 : [Mines] Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2(x)}dx$.

Ex 12 : [Mines] Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt$.

Ex 13 : [Mines]

1. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{it^2}dt \underset{x\to+\infty}{=} \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Ex 14 : [Mines] Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)} dt$.

2. Trouver une relation de récurrence d'ordre deux vérifiée par (I_n).

3. Calculer I_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Séance du 21/05 : Algèbre générale

Ex 15 : [Centrale] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2.

1. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$ et on considère $x \in \mathbb{R}$ tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$. En utilisant P'/P, montrer que $P''(x)P(x) < 0$.

2. Soient x_1, x_2 deux racines réelles consécutives de P. Montrer que $P'(x_1)P'(x_2) \leq 0$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $P - a$ et $P - b$ soient scindés sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Ex 16 : [Mines] Soit p un nombre premier impair.

1. Dénombrer les carré de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2. On suppose que $p \equiv 1[4]$. En calculant la classe de $(p-1)!$ modulo p de deux manières différentes, montrer que -1 est un carré modulo p.

3. On suppose que -1 est un carré modulo p. Montrer que $p \equiv 1[4]$.

Ex 17 : [Mines]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique P_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$\forall \theta \in]0, \pi/2[,\ P_n\left(\dfrac{1}{\tan^2\theta}\right) = \dfrac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}$.

2. Préciser le degré et les racines de P_n. Étudier la somme des racines.

3. Montrer que : $\forall \theta \in]0, \pi/2[,\ \dfrac{1}{\tan^2\theta} \leq \dfrac{1}{\theta^2} \leq 1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta}$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ex 18 : [Mines] Soit G un sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{C})$ tel que $G \cap SL_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$. Montrer que G est cyclique.

Ex 19 : [Mines] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. On pose $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geq 0$.

Ex 20 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Ex 21 : [Mines] Soient $a_1 < \ldots < a_n$ des entiers relatifs, $P = 1 + \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^2$. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

Séance du 26/05 : Probabilité, dénombrement

Ex 22 : [Mines] Soit p un nombre premier et on pose $q = (p^2 - 1)(p^2 - p)$.

1. Donner le cardinal de $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, montrer que $A^{q+2} = A^2$.
3. Donner le cardinal de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour $n \geq 2$.
4. Donner le cardinal de $SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\ \det(M) = 1\}$.

Ex 23 : [Centrale] Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, on donne une variable aléatoire X qui suit la loi ζ : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{1}{\zeta(s)} \dfrac{1}{n^s}$ et on note A : « n divise X ».

1. Calculer la probabilité de cet évènement pour tout n.
2. Si $n_1, \ldots, n_k$ sont des nombres premiers entre eux, montrer que les évènements « n_i divise X » sont mutuellent indépendants.
3. On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant ; montrer que $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{p_n}$ est divergente.

Ex 24 : [Centrale]

1. Montrer que $P(X) = X^3 - X^2 - X - 1$ admet une unique racine réelle dans $]1, 2[$ et deux racines complexes de module strictement inférieur à 1.
2. On lance n fois une pièce de manière indépendante et on note A_n l'évènement « on a obtenu pour la première fois 3 piles d'affilée aux lancers $n-2$, $n-1$, n ».
   Montrer que $u_n = P(A_n)$ suit une relation de récurrence d'ordre 3.
3. Nature de $\sum 2^n u_n$.

Ex 25 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $2n$ équipes sportives, n en première division et n en seconde division. On organise n matchs. Soit a_n la probabilité d'avoir systèmatiquement une équipe de première division face à une équipe de seconde division.

1. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Donner un équivalent de a_n.

Ex 26 : [Mines]

1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
2. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On retire les boules une à une et on note X le nombre de tirages nécessaires pour retirer toutes les boules blanches. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\binom{n-1}{b-1}}{\binom{r+b}{b}}$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Ex 27 : [Mines] On considère une urne a boules blanches et b boules rouges. Après chaque tirage, on remet c boules de la couleur tirée dans l'urne. On effectue n tirages et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On considère Y la variable aléatoire donnant le numéro du premier tirage pour lequel on tire une boule rouge. Montrer que Y admet un espérance et calculer la loi de Y.

Ex 28 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\mathcal{P}(\{1, 2, ..., n\})$. Déterminer $P(A \subset B)$.

Séance du 28/05 : Matrices et déterminant

<u>Ex 29</u> : [Centrale] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la comatrice de $J_{r,n}$, la matrice diagonale ayant r coefficients égaux à 1, puis uniquement des coefficients nuls sur la diagonale.
2. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ Com(AB) = Com(A)Com(B)$.
3. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quel est le rang de $Com(M)$?
4. L'application $Com : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle injective ? Quelle est son image ?

<u>Ex 30</u> : [Mines] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $tr(M) = 0$ si et seulement si M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

<u>Ex 31</u> : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{rg}\,(B) = 1$.
Comparer $\det(A + B)\det(A - B)$ et $\det(A^2)$.

<u>Ex 32</u> : [Mines] Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A + N$.

<u>Ex 33</u> : [Mines] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Ex 34</u> : [Mines] Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une application non constante telle que :
$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A)f(B)$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

<u>Ex 35</u> : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = [\alpha^{|i-j|}]_{1 \le i,j \le n}$. La matrice A est-elle dans $GL_n(\mathbb{R})$. Le cas échéant, calculer son inverse.

Séance du 01/06 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 36 : [Centrale] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$.

1. Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.
2. Donner un équivalent de a_n. On pourra étudier $S_{n+1}^\alpha - S_n^\alpha$ pour un α bien choisi.

Ex 37 : [Centrale] Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T]$, soit
$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u)e^{-kn(t-u)}du.$

1. Justifier l'existence de $\varphi_n(t)$.
2. Étudier la convergence simple de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On suppose que la suite $\left(\int_0^T f(u)e^{nu}du\right)_{n\geq 0}$ est bornée. Montrer que f est la fonction nulle.

Ex 38 : [Centrale]

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifer l'existence de $f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nx})$.
2. Montrer que la série de fonction la question précédente converge uniformément sur tout $[a,+\infty[$, avec $a > 0$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0.

Ex 39 : [Mines]

1. Montrer que $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $F(x+1)+F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier F, en donner un équivalent en 0 et un équivalent en $+\infty$.

Ex 40 : [Mines] Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et que f'' soit intégrable.

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ puis que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x+n+1) - f(x+n) - f'(x+n)| \leq \int_{x+n}^{x+n+1} |f''|$.
3. Montrer que : $\sum f'(x+n)$ converge uniformément et étudier $\sum f(x+n)$.

Ex 41 : [Mines] Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\left(2^n(\zeta(n)-1)-1\right)$, avec $\displaystyle\zeta(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}$, pour $x>1$.

Ex 42 : [Mines] Dessiner le domaine de convergence dans $\mathbb{C}$ de $\displaystyle\sum \exp\left(\frac{nz}{z-2}\right)$.

Séance du 03/06 : Réduction

Ex 43 : [Centrale] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice de nilpotence d.

- *a.* Montrer que : $d \leq n$.
- *b.* Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et donner son inverse.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$.

- *a.* Montrer que $|tr(M)| \leq n$. Étudier le cas d'égalité.
- *b.* Étudier le cas $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 44 : [Centrale] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Comparer $Sp(B)$ et $Sp({}^tB)$.

2. Montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$.

3. Soit $r \in [\![1, n]\!]$. On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r telle que $AC = CB$. Montrer que $\chi_A \wedge \chi_B$ est de degré supérieur ou égal à r.

4. Étudier la réciproque.

Ex 45 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$ et $C'(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall M \in C(A),\ XM = MX\}$. On pose $\mathbb{R}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$.

1. Quelle est la dimension de $C[A]$? A-t-on $C(A) = \mathbb{R}[A]$?

2. Quelle est la dimension de $C'[A]$? Montrer que $C'(A) = \mathbb{R}[A]$.

Ex 46 : [Mines] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.

2. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

Ex 47 : [Mines] Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ telle que : $AX - XB = C$.

Ex 48 : [Mines] Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 soit un projecteur.

1. Montrer que f est trigonalisable.

2. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $rg(f) = rg(f^2)$.

<u>Ex 49</u> : [Mines] Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 - 2A^4 - 2A^3 + A^2 + 4A + 4I_n = 0$; $tr(A) = 0$; $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Séance du 07/06 : Séries entières

Ex 50 : [Centrale] Soient $a \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puis exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f.
2. En déduire que f est égale à sa série de Taylor.
3. Déterminer l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

Ex 51 : [Mines] Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. On dit que $\sum u_n$ converge au sens d'Abel si $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ existe dans $\mathbb{C}$. Cette limite est la somme au sens d'Abel de la série.

1. On suppose $(u_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si elle converge au sens de d'Abel. Comparer les deux sommes.
2. Montrer qu'une série convergente est convergente au sens d'Abel, et que sa somme au sens d'Abel est alors égale à sa somme ordinaire.
3. Étudier la convergence au sens d'Abel de $\sum u_n$, avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n(n+1)$.

Ex 52 : [Mines] On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$ et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n!$.
2. Donner la valeur de $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u_k}{k!} x^k$ quand elle est définie.
3. En déduire (u_n).

Ex 53 : [Mines] Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq A|z|^d + B$. Montrer que f est polynomiale.

Ex 54 : [Mines] On note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ et R' celui de $\sum \dfrac{a_n}{1 + |a_n|} z^n$.

1. Montrer que $R' \geq \max(1, R)$.
2. Comparer R et R' si $R' > 1$.
3. Exprimer R' en fonction de R.

Ex 55 : [Mines]

1. Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' - xy + 1 =$. Trouver les solutions de (E) développables en série entières sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin(t)} dt$ est solution de (E).
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 56 : [Mines]

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

Séance du 09/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 57 : [Mines] Soit E l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ converge.

1. Justifier qu'en posant : $\forall f, g \in E,\ (f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$, on définit un produit scalaire sur E.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale de degré n.
3. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.
4. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $e_a : x \mapsto e^{-ax}$. Montrer que $\|e_a\|^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(L_n|e_a)^2$.
5. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

Ex 58 : [Centrale]

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $Sp(A)$ pour que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXAX > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices vérifiant cette condition.
2. Soient $n \geq 2$, $p \in [\![1, n-1]\!]$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On écrit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^tC & D \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(B) > 0$, puis que $\det(A) \leq \det(B)\det(D)$.

Ex 59 : [Mines] Soit $n \geq 2$. Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (voir exercice précédent), soit A_1 la matrice obtenue en ôtant à A sa première ligne et sa première colonne. On note $(.,.)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A_1 \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que : $(Ax, x)(A^{-1}y, y) \geq (x, y)^2$.
3. Trouver $y \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall A \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ \min\left\{\dfrac{(Ax,x)}{(x,y)^2};\ x \in \mathbb{R}^n,\ (x,y) \neq 0\right\} = \dfrac{\det(A)}{\det(A_1)}$.
4. Pour $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, comparer $\dfrac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)}$ et $\dfrac{\det(A)}{\det(A_1)} + \dfrac{\det(B)}{\det(B_1)}$.

Ex 60 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\overline{M}M = I_n$.

1. Soit $A \in U_n(\mathbb{C})$ symétrique. En considérant les parties réelles et imaginaires de A, montrer que A s'écrit e^{iS} où $S \in S_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in U_n(\mathbb{C})$ si et seulement si A s'écrit Oe^{iS}, avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Ex 61 : [Mines] Soient E un espace euclidien, $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Montrer que p est symétrique si et seulement si : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Ex 62 : [Mines] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si :
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX = 0$.

Ex 63 : [Mines] Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Im}(f - Id_E)$.

Séance du 11/06 : Équations différentielles, calcul différentiel

---

Ex 64 : [Centrale] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si : $\forall a, b \in U,\ f(b) \geq f(a) + (\nabla f(a), b - a)$.

Ex 65 : [Mines] Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x(1 - y)$ si $x \leq y$ et $f(x, y) = y(1 - x)$ sinon. Étudier la continuité et la différentiabilité de f.

Ex 66 : [Mines] À l'aide du changement de variable $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$, déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

Ex 67 : [Mines] Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions T-périodiques de $x' = ax + b$.

Ex 68 : [Mines] Soient u une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et f une solution de l'équation différentielle $y'' + (1 + u)y = 0$.
Soit pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = f(x) = +\displaystyle\int_0^x \sin(x - t)u(t)f(t)dt$.

1. Fromer une équation différentielle linéaire vérifiée par g.
2. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leq c + c\displaystyle\int_0^x |u(t)f(t)|dt$.
3. Montrer que f est bornée.

Ex 69 : [Mines] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, E l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $U \in E$, on note $Y_{Y_0,U}$ l'unique solution du problème de Cauchy $Y(0) = Y_0$ et $\forall t \in [0, T],\ Y'(t) = AY(t) + BU(t)$.

1. Montrer que, si $t \in [0, T]$, il existe $\varphi_t \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ tel que :
   $\forall (Y_0, U) \in E \times \mathbb{R}^n,\ Y_{Y_0,U}(t) = e^{tA}Y_0 + \varphi_t(U)$.
2. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
   - **a.** $\forall Y_1 \in \mathbb{R}^n, \exists U \in E, \varphi_T(U) = Y_1$;
   - **b.** $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n, \exists U \in E, Y_{Y_0,U}(T) = 0$;
   - **c.** l'image de φ_T est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Ex 70 : [Mines] Soient E un espace euclidien, S sa sphère unité, f une fonction différentiable sur une voisinage de S à valeurs réelles. On suppose que la restriction de f à S admet un extremum local en x_0.

1. Montrer que x_0 et $\nabla f(x_0)$ sont colinéaires.
2. Soit u un endomorphisme symétrique de E. Appliquer ce qui précède à $f : x \mapsto (u(x)|x)$. En déduire une démonstration du théorème spectral.

Séance du 15/06 : Variables aléatoires

Ex 71 : [Mines] Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et centrées.

On pose $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_k = \sigma(X_k)$ et $\sigma = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$; $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$;

pour $k \geq 2$: $A_k^\varepsilon = \{|S_k| \geq \varepsilon\} \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} \{|S_i| < \varepsilon\}\right)$ avec $\varepsilon > 0$.

1. Exprimer $\{\max\limits_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}$ en fonction des A_i^ε pour $1 \leq i \leq n$.
2. Montrer que $E\left((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right) = E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) - E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon})$ (on pourra considérer $E\left((S_n - S_k) S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right)$).
3. En déduire que $P(\{\max\limits_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}) \leq \dfrac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
4. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchef.

Ex 72 : [Mines] Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Une variable aléatoire X suit la loi $GN(p)$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^k.$$

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $GN(p)$. On pose $D = |X - Y|$. Donner la loi de D.
2. Soit $Z = \min(X, Y)$. Calculer, si $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z \geqslant k)$, et en déduire la loi de Z.
3. Quelle est la loi du couple (D, Z) ?

Ex 73 : [Mines] On considère n expériences indépendantes ayant les probabilités de réussite respectives $p_1, ..., p_n$. On note N le nombre d'expériences ayant réussi.

1. Déterminer $E(N)$ et $V(N)$.
2. On fixe $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$. Quel est le maximum de $V(N)$ sous la contrainte $E(N) = m$?

Ex 74 : [Mines] Peut-on piper deux dés de sorte que, les lancers étant supposés indépendants, leur somme suive la loi uniforme sur $\{2, ..., 12\}$?

Ex 75 : [Mines] Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, ainsi que Y une variable aléatoire indépendante des deux premières à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telle que $P(Y = 1) = p \in]0, 1[$. On note M la matrice $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
2. Quelle est la probabilité que les valeurs propres de M soient réelles ?
3. Quelle est la probabilité que les valeurs propres de M appartiennent à l'ensemble défini par $\{\rho e^{i\theta}, \rho > 0, |\theta| < \theta_0\}$ où $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$?

Ex 76 : [Mines] Une pièce a une probabilité p de tomber sur « pile » et $q = 1 - p$ de tomber sur « face ». On effectue successivement une infinité de lancers. On note S_n le numéro du tirage pour lequel on obtient « pile » pour la $n^{\text{ème}}$ fois (on convient que $S_n = +\infty$ si cet événement n'est pas réalisé). Calculer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

Ex 77 : [Mines] On note Z une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ième de l'unité, suivant une loi uniforme.

1. Calculer $E(\arg(Z))$, $E(\Re e(Z))$, $E(\Im m(Z))$, $Cov(\Re e(Z), \Im m(Z))$.
2. $\Re e(Z)$ et $\Im m(Z)$ sont-elles indépendantes ?

Séance du 17/06 : Espaces vectoriels normé, suites, fonctions usuelles, dérivation

---

Ex 78 : [Mines]

1. Montrer que $P_n(X) = X^n - nX + 1$ admet une unique racine x_n dans $[0, 1]$.
2. Déterminer la limite de (x_n) puis donner un équivalent de x_n et un développement asymptotique à deux termes.

Ex 79 : [Mines] Soient $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Pour $f \in E$, soit $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E et la comparer à $\|.\|_\infty$.
2. Même question avec $N_1(f) = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'|$, pour $f \in E$.

Ex 80 : [Centrale] On note $S(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in GL_n(\mathbb{R})\}$ où A est une matrice donnée.

1. Déterminer la limite de la suite $(Q_q^{-1}TQ_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ où T est triangulaire supérieure et $Q_q = Diag(q^n, q^{n-1}, \ldots, q)$.
2. Montrer que A est trigonalisable si et seulement si l'adhérence de $S(A)$ contient une matrice diagonale.
3. Montrer que T est nilpotente si et seulement si $S(T)$ contient une matrice supérieure à diagonale nulle, si et seulement si l'adhérence de $S(T)$ contient la matrice nulle.

Ex 81 : [Centrale] Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels de dimension finie et $f : E \to F$ continue. On dit que f est propre si pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

1. On suppose que f est propre. Montrer que l'image par f d'un fermé de E est un fermé de F.
2. Montrer que f est propre si et seulement si $\displaystyle\lim_{\|x\|\to+\infty} = \|f(x)\| = +\infty$.

Ex 82 : [Mines] Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; en déterminer les composantes connexes par arcs.

Ex 83 : [Mines]

1. Montrer que l'ensemble des matrices de rang $k \leq r$ pour $r \in [\![1, n]\!]$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver l'adhérence de l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang égal à r.

Ex 84 : [Mines]

1. Déterminer l'ensemble F des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$.
2. Même question avec f continue de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ dérivable en 0 et telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1 + f^2(x)}$.