Semaine 5 : du 14 octobre au 18 octobre

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Systèmes linéaires et matrices, révisions de sup

- **Généralités sur les systèmes linéaires**
  - Définitions ;
  - Opérations élémentaires ;
  - Matrice d'un système, système de Cramer lorsque la matrice est inversible ;
  - Recherche de l'inverse d'une matrice par la résolution d'un système.
- **Rang**
  - Le rang est donnée par le rang des colonnes ou des lignes de la matrice ; algorithme du pivot de Gauss ;
  - Rang d'un produit et le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible, par transposition ;
  - Recherche d'un inverse par le pivot de Gauss ou la résolution d'un système linéaire.
  - Rang et matrices extraites.
- **Matrices équivalentes**
  - Définition ;
  - Une matrice de rang r est équivalente à $J_r = diag(1, ..., 1, 0, ..., 0)$.

Endomorphismes et matrices particuliers

- **Polynômes d'endomorphismes ou de matrices**
  - Définitions, compatibilité avec les opérations de $\mathbb{K}[X]$;
  - Polynômes annulateurs, idéal annulateur ;
  - Polynôme minimal, lien entre un polynôme annulateur et le polynôme minimal, polynôme minimal d'un endomorphisme induit.
  - Les algèbres $\mathbb{K}[u]$, avec $u \in \mathcal{L}(E))$ ou $\mathbb{K}[A]$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; dimension.
  - Lemme des noyaux pour 2 ou plus polynômes.
- **Matrices et endomorphismes nilpotents**
  - Définition ;
  - Indice de nilpotence et majoration par la dimension.

Déterminants, révisions de sup

- **Déterminant d'une matrice**
  - Définition ;
  - Multilinéarité du déterminant , déterminant et opérations élémentaires ;
  - $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible ;
  - Déterminant d'une matrice triangulaire et diagonale ;

— Déterminant et produit, transposée, produit par un scalaire ;
— Développement par rapport à une ligne ou une colonne ;
— Commatrice, expression de l'inverse d'une matrice ;
— Invariance du déterminant par similitude ;
— Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ;
— Déterminants de Vandermonde.

- **Applications du déterminant en algèbre linéaire**

— Expression des formes multilinéaires alternées ;
— Déterminant dans une base d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n ; opérations élḿentaires ; caractérisation des bases ;
— Formule de changement de base.
— Déterminant d'un endomorphisme ; déterminant d'une composée et $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$. Critère de bijectivité et déterminant de l'inverse.
— Effet d'une application linéaire sur le déterminant d'une famille.

À savoir démontrer

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ d'indice de nilpotence p et $\dim(E) = n$.

  a. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre.

  Jusqu'à la fin, on suppose que $p = n$.

  b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & (0) & \vdots \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  c. Déterminer le polynôme minimal de f.
- CCINP 4
- CCINP 62
- CCINP 83 (on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, s'il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$.
  Pour $\lambda = 0$, les x vérifiant $f(x) = \lambda x$ sont les éléments du noyau de f).
- CCINP 93