Correction des exercices du 09/09/2024 (Intégration)

<u>Ex 1</u> : CV et calcul de : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{t^2\cos(1/t)}\,\mathrm{d}t$.

Correction : Soit $f : t \mapsto \dfrac{\sin(1/t)}{t^2\cos(1/t)}$ qui est continue et positive sur $[1,+\infty[$. En effet si $t \geq 1$, alors $0 < 1/t \leq 1 < \pi/2$ et donc $\cos(1/t)$ ne s'annule pas.

Problème en $+\infty$: quand t tend vers $+\infty$, $1/t$ tend vers 0, donc on a : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1/t}{t^2\times 1} = \dfrac{1}{t^3}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^3}dt$ converge, alors par comparaison de fonctions positives, $\underline{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{t^2\cos(1/t)}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

On pose le changement de variable $u = 1/t$. On a donc $t = 1/u$, puis $dt = -\dfrac{du}{u^2}$ et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{t^2\cos(1/t)}\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 \frac{\sin(u)}{(1/u^2)\times\cos(u)}\frac{du}{u^2} = \int_0^1 \frac{-\cos'(u)}{\cos(u)}du = [-\ln|\cos(u)|]_0^1 = -\ln(\cos(1)) + \ln(1) = \boxed{-\ln(\cos(1))}$.

<u>Ex 2</u> : CV de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^{-2t}-e^{-t})\sin(t)}{(1-\cos(t))\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Correction : La fonction $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{(e^{-2t}-e^{-t})\sin(t)}{(1-\cos(t))\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ (cos ne vaut pas 1 sur $]0,1] \subset]0,\pi/2]$).

Problème en 0 : On a au voisinage de 0 : $e^{-2t}-e^{-t} = 1-2t-(1-t)+o(t) = -t+o(t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$ et donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t\times t}{(t^2/2)\times\sqrt{t}} = -\dfrac{2}{\sqrt{t}}$. Ainsi $f(t)$ est négative au voisinage de zéro et par comparaison de fonctions de même signe au voisinage de 0, comme $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge, alors
$\underline{\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^{-2t}-e^{-t})\sin(t)}{(1-\cos(t))\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

<u>Ex 3</u> : CV de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Correction : La fonction $f : x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} - a - \dfrac{b}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Problème en $+\infty$: Quand x tend vers $+\infty$, $1/x$ tend vers 0. On effectue un DL en $1/x$:

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} = e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\left(x+\frac{1}{x}\right).\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e.e^{-\frac{1}{2x}+\frac{4e}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e\left(1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{5}{6x^2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{6x^2}\right)^2+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = e-\dfrac{e}{2x}+\dfrac{4}{3x^2}+\dfrac{e}{8x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = e-\dfrac{e}{2x}+\dfrac{35e}{24x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On a donc quand x tend vers $+\infty$:

$f(x) = (e-a)-\dfrac{e+2b}{2x}+\dfrac{35e}{24x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = (e-a)-\dfrac{e+2b}{2x}+g(x)$, avec g une fonction continue sur $[1,+\infty[$ (car $g(x) = f(x)-(e-a)+\dfrac{e+2b}{2x}$) et $g(x) = O(1/x^2)$. Ainsi g est intégrable sur $[1,+\infty[$.

• <u>Si $a \neq e$:</u> alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a-e \neq 0$ qui n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ (c'est une constante non nulle). Ainsi par comparaison de fonctions de même signe à partir d'une certain rang,

f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

• Si $a=e$ et $b\neq -e/2$: alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e+2b}{2x}$ qui n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ (car $x\mapsto 1/x$ ne l'est pas). Ainsi par comparaison de fonctions de même signe à partir d'un certain rang, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

• Si $a=e$ et $b=-e/2$: on a $f=g$, donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Fin de la correction des exercices de TD

Ex 4 : ***1.*** Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-at}}{t}dt=\int_x^{ax}\frac{e^{-t}}{t}dt$, avec $a\in\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-at}}{t}dt=\ln a$.

3. Montrer que $f(t)=\dfrac{1}{1-e^{-t}}-\dfrac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et bornée.

4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}(e^{-t}-e^{-nt})f(t)dt$.

5. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

Correction : ***1.*** Fait en TD.

2. Fait en TD.

3. Le prolongement par continuité a été fait. On constate que : $\displaystyle\lim_{+\infty}f=1$. Par définition de la limite, il existe $A\in\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t\in[A,+\infty[,\ |f(t)-1|\leq 1$, donc : $\forall t\in[A,+\infty[,\ 0\leq f(t)\leq 2$. Ainsi f est bornée sur $[A,+\infty[$. Sur $]0,A]$, on peut prolonger f en une fonction continue et cette fonction prlongée est donc continue sur le segment $[0,A]$, donc elle y est bornée. Ainsi f est aussi bornée sur $]0,A]$. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}(e^{-t}-e^{-nt})f(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}f(t)dt-\int_0^{+\infty}e^{-nt}f(t)dt$. Ces deux intégrales convergent donc on peut les séparer. En effet Soit $M\in\mathbb{R}_+$ tel que $|f|\leq M$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (grçe à la question 3).
Pour $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a donc : $|f(t)e^{-t}|\leq Me^{-t}$ et $|f(t)e^{-nt}|\leq Me^{-nt}$, ce qui assure la convergence des deux intégrales.
On a donc : $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}e^{-nt}f(t)dt\right|\leq\int_0^{+\infty}e^{-nt}|f(t)|dt\leq M\int_0^{+\infty}e^{-nt}dt=\frac{M}{n}$. Ceci permet de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-nt}f(t)dt=0$. On obtient donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}(e^{-t}-e^{-nt})f(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}f(t)dt$.

5. On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}(e^{-t}-e^{-nt})f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{1-e^{-t}}dt+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{1-e^{-t}}dt-\ln(n)$, grâce à la question 2.
On a $\forall t\in]0,1]$, $\displaystyle\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{1-e^{-t}}=e^{-t}\times\frac{1-(e^{-t})^{n-1}}{1-e^{-t}}=e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-t})^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-(k+1)t})$ somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{-t}\neq 1$.
Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{1-e^{-t}}dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty}e^{-(k+1)t}dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.
On a donc grâce à la question précédente et les calculs précédents :
$\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=\int_0^{+\infty}(e^{-t}-e^{-nt})f(t)dt+\ln(n)=\int_0^{+\infty}e^{-t}f(t)dt+o(1)+\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$, car $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}f(t)dt+o(1)$ tend vers une constante.