Séance du 16/05 : Algèbre linéaire et probabilité

Ex 1 : [Mines] Soit E un ensemble. Une application p de E dans E est dite idempotente si $p \circ p = p$.

1. Soit p idempotente sur E.
   a. Montrer que si p est injective, alors $p = Id_E$.
   b. Montrer que si p est surjective, alors $p = Id_E$.
   c. Donner une application idempotente sur un ensemble à deux éléments qui n'est pas l'identité.
   d. Donner trois applications idempotentes sur un ensemble à deux éléments, et dix sur un ensemble à trois éléments.
2. Montrer qu'une application p est idempotente si et seulement si : $\forall x \in p(E),\ p(x) = x$.
3. On suppose que E est fini de cardinal n. Dénombrer les application idempotentes sur E.

Ex 2 : [Mines] On part à la cueillette aux champignons. Le nombre N de champignons récoltés suit une loi de Poisson de paramètre 5. Chaque champignon a la probabilité $2/3$ d'être comestible.

1. Déterminer la probabilité de ramasser exactement un champignon comestible et un champignon non comestible.
2. Déterminer la probabilité que tous les champignons ramassés soient non comestibles.

Ex 3 : [Centrale] Soit E un espace de dimension finie.

1. Rappeler la définition d'un hyperplan.
2. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On appelle *réflexion de a* toute application $s \in GL(E)$ telle que $s(a) = -a$ et pour laquelle il existe un hyperplan H de E tel que : $\forall x \in H,\ s(x) = x$.
   Soit R une partie génératrice finie de E.
   Montrer qu'il existe au plus une réflexion de a telle que $s(R) = R$.

Ex 4 : [Centrale] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $k = \min\{j \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Ker}\,(u^j) = \mathrm{Ker}\,(u^{j+1})\}$.

1. Montrer que k est bien défini et, que, pour $j \geq k$, on a : $\mathrm{Ker}\,(u^j) = \mathrm{Ker}\,(u^k)$ et $\mathrm{Im}\,(u^j) = \mathrm{Im}\,(u^k)$.

   On pose $K_u = \mathrm{Ker}\,(u^k)$ et $I_u = \mathrm{Im}\,(u^k)$. On note u_I et u_K les endomorphismes induits par u sur I_u et K_u.

2. Montrer que u_K est nilpotente et que u_I est un automorphisme.
3. Montrer que : $K_u \oplus I_u = E$.
4. Si K et I sont des sous-espaces de E, on note $Nil(K)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de K, $Aut(I)$ l'ensemble des automorphismes de I. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des (K, I, v, w), avec (K, I) couple de sous-espaces supplémentaires de E, $v \in Nil(K), w \in Aut(I)$. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{C} \\ u & \mapsto & (K_u, I_u, u_K, u_I) \end{array} \right.$ est une bijection.

5. Montrer que k est la valuation du polynôme minimal μ_u de u ($\mu_u = \sum_{m=k}^{r} a_m X^m$, avec $a_k \neq 0$).

<u>Ex 5</u> : [Centrale] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. L'objectif est de montrer que les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique χ_u sont les mêmes que ceux du polynôme minimal μ_u. Soit P un facteur irréductible de π_u de degré d.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(P(u))$ contient un vecteur x non nul.
2. Pour ce vecteur x, montrer que $(x, u(x), ..., u^{d-1}(x))$ est une base de $F = vect\left((u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}\right)$.
3. On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Calculer χ_{u_F}, et en déduire que P est un facteur de χ_u.
4. En factorisant $u^k - \lambda^k Id_E$, pour λ dans $\mathbb{K}$, montrer que $\chi_u | \mu_u^n$ et conclure.

<u>Ex 6</u> : [Mines] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $p, q, r \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur. Montrer que : $q = r = 0$.

<u>Ex 7</u> : [Mines] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = g(x)v$.

<u>Ex 8</u> : [Mines] Soient E, F, G, trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$.

<u>Ex 9</u> : [Mines]

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\bigcap_{l\in A} \mathrm{Ker}\,(l) = \{0\}$. Montrer que $A = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
2. Soient $f_1, ..., f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $[f_i(x_j)]_{1\leq i,j\leq n}$ soit inversible.

Séance du 18/05 : Intégration

Ex 10 : [Mines] Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}dx$.

Ex 11 : [Centrale] Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit : $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} \ln t \, \mathrm{d}t$.

1. **a.** Montrer que I_a converge pour tout complexe a de partie réelle strictement positive.

b. Montrer que : $I_a = \displaystyle\frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-at}-1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{a}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t$.

c. Quel est le signe de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$?

2. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on définit : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\exp(ix)} \ln t \, \mathrm{d}t$.
Montrer que F est solution d'une équation différentielle.

3. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\cos x} \cos(t\sin x) \ln t \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\cos x} \sin(t\sin x) \ln t \, \mathrm{d}t$.

Ex 12 : [Centrale] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que si ff' admet une limite (éventuellement infinie) non nulle en $+\infty$, alors f^2 tend vers $+\infty$.

2. On suppose que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f')^2$ l'est aussi et que l'on a :
$\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right)$.

3. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

Ex 13 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée et $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}$.

1. Montrer que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} L(x) = 0$.

3. On suppose que $f(0)$ est non nul. Déterminer un équivalent de L en $+\infty$.

4. On suppose que $L(0)$ existe. Montrer que L est continue en 0.

5. On suppose que $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que L est dérivable en 0 et donner $L'(0)$.

Ex 14 : [Mines] Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une subdivision $(a_{n,0}, ..., a_{n,n})$ de $[0,1]$ telle que :
$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \displaystyle\int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f = \frac{1}{n}\int_0^1 f$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}(a_{n,0} + ... + a_{n,n})$.

Ex 15 : [Mines] Pour $x \in]1,+\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt$. Déterminer la limite de F en 1^+. Montrer que F est injective.

Ex 16 : [Mines] L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ est-elle convergente ? Absolument convergente ?

Séance du 20/05 : Algèbre générale

Ex 17 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, ..., z_n$ les racines de $X^n + 1$. On pose, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $F_k = \dfrac{X^k}{X^n+1}$.

1. Décomposer F_k en éléments simples.
2. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que : $XP'(X) = \dfrac{n}{2}P(X) + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$.
3. Si Q est dans $\mathbb{C}_n[X]$, on pose $\|Q\|_\infty = \max\limits_{|z|=1} |Q(z)|$. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a : $\|P'\|_\infty \leq n\|P\|_\infty$.

Ex 18 : [Centrale] Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $U_0 = 1$, $U_1 = 2X$ et, pour $n \geq 2$, $U_n(X) = 2XU_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de U_n.
2. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\sin(\theta)U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$.
3. Soit $n \geq 2$. Montrer que U_n possède n racines distinctes et écrire U_n sous forme de produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $n \geq 2$. Étudier les racines rationnelles de $V_n(X) = U_n\left(\dfrac{X}{2}\right)$.
5. Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'irrationalité de $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

Ex 19 : [Centrale] Soit $\mathbb{K}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, montrer que $f : x \mapsto ax$ est un automorphisme. En déduire que a est inversible.
2. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}.1$. Montrer que $(1, a)$ est libre et $(1, a, a^2)$ est liée.
3. Montrer l'existence de $i \in \mathbb{K}$ tel que $i^2 = -1$, puis que $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Ex 20 : [Mines] Quel est le chiffre des unité de $2022^{2022^{2022}}$?

Ex 21 : [Mines] Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $9x \equiv 6[24]$.

Ex 22 : [Centrale] Soit G un groupe. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. Rappeler les définitions de groupes et de morphismes de groupes. Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe.
2. Déterminer $\widehat{G}$ dans le cas où $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ex 23 : [Mines] Soit $(G, *)$ un groupe fini dont tous les éléments sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire de $|G|$?

Séance du 23/05 : Matrices et déterminants

<u>Ex 24</u> : [Mines] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Un hyperplan de E est défini comme supplémentaire d'une droite vectoriel.

1. Montrer qu'un espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle l telle que : $H = \mathrm{Ker}\,(l)$.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto Tr(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible. Calculer $Tr(J_r C)$, avec $J_r = diag(\underbrace{1, ..., 1}_{r \text{ fois}}, 0, ..., 0)$.
4. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

<u>Ex 25</u> : [Mines] Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Q_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$.

1. Calculer $Q_p(x+1) - Q_p(x)$ en utilisant la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (p+1)x^p \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $Q_p(n+1) = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} k^p$.
3. Retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

<u>Ex 26</u> : [Mines] Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $\Phi : A \mapsto A^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

<u>Ex 27</u> : [Mines] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $tr(f(I_2)) = 0$ et $f(N) = 0$ pour toute matrice N nilpotente. Montrer que $f^2 = 0$.

<u>Ex 28</u> : [Mines] Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que le degré du polynôme minimal μ_u est majoré par $1 + \mathrm{rg}\,(u)$.

Ex 29 : [Mines]

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier l'existence d'un réel d tel que $A^3 + dA = 0$.

2. Déterminer d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ exprimer A^{2n} en fonction de n, d et A^2.

3. Montrer que $\exp(A) = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ où α et β sont deux réels à expliciter.

Ex 30 : [Centrale] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0,n]\!]$. On note R_p l'ensemble des matrices de rang p.

1. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et N sont de même rang si et seulement s'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNQ$.

2. Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.

3. Montrer que R_p est connexe par arcs.

4. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de R_p.

Séance du 25/05 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 31 : [Centrale]

1. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}dt$?
2. Nature de $\displaystyle\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Ex 32 : [Mines] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que $\sum u_n$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$.

1. On suppose $\alpha \leq 0$. Montrer que $\sum v_n$ converge.
2. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum v_n$ diverge.
3. On suppose $\alpha \in]0,1[$. Montrer que $\sum v_n$ converge.

Ex 33 : [Centrale]

1. Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) 1_{0\leq x\leq n}$. Tracer le graphe de f_n. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f que l'on précisera.
   Est-il vrai que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f$?
3. Énoncer le théorème de convergence dominée sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   Le démontrer sous l'hypothèse supplémentaire de convergence uniforme sur tout segment inclus dans I. On supposera sans perte de généralité que $I = [a, b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.
4. Démonstration dans le cas discret. On suppose :
   - $(f_n(k))_{n\geq 0}$ converge vers $f(k)$ pour tout k de $\mathbb{N}$.
   - $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(k)| \leq \phi(k)$.
   - La famille $(\phi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille sommable.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} f_n(k)$ existe pour tout n, que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} f(k)$ existe et que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$.

Ex 34 : [Mines] On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f_0 = 1$ et si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n(t - t^2)dt$.

1. Montrer que les f_n sont polynomiales.
2. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f et que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq e^x$.
3. Montrer que $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur $[0,1/2]$, puis que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur cet intervalle.
4. Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, que dire de $f_n(x) + f_n(1-x)$? Qu'en déduit-on sur f ?
5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Ex 35 : [Mines] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$. Étudier le domaine de définition, de continuité de dérivabilité de f ; trouver sa limite en $+\infty$ et un équivalent simple.

Ex 36 : [Mines] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue et strictement décroissante, avec $f(0) = 1$. On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, mais que $\frac{1}{1-f}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^{+\infty} (f(t))^n\, dt$.

1. Montrer que I_n est bien définie et que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
2. Montrer que la série $\sum I_n$ diverge.
3. Quel est le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$?

Ex 37 : [Mines] Soit $s \in]1, +\infty[$ et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Si n est dans $\mathbb{N}^*$, doit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = (\zeta(s))^2$.
2. Si $s > 2$, montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, avec φ l'indicatrice d'Euler.

Séance du 01/06 : Réduction et probabilités

Ex 38 : [Mines] On pose $d_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de dérangements de $\{1, 2, ..., n\}$ (permutations sans points fixes).

1. Soit σ une permutation prise aléatoirement de façon uniforme dans $\mathcal{S}_n$. Quel est le nombre moyen de points fixes ?
2. **a.** Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

   b. En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   c. Montrer que le nombre de permutations de $\{1, 2, ..., n\}$ admettant exactement p points fixes est $\displaystyle\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}$. En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!} = 1$.

Ex 39 : [Centrale] Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient $u_1, ..., u_n \in \mathcal{L}(E)$ non nuls tels que : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ u_i \circ u_j = \delta_{i,j} u_j$. Soit $v = u_1 + ... + u_n$.

1. Montrer que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,(u_i) = E$. Déterminer v.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que v est diagonalisable si et seulement s'il existe $u_1, ..., u_n \in \mathcal{L}(E)$ non nuls tels que : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ u_i \circ u_j = \delta_{i,j} u_j$ et $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$.
3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que les $u_1, ..., u_n$ précédents sont des polynômes en v.

Ex 40 : [Centrale] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Exprimer le déterminant de M en fonction de celui de A.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si la matrice $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Ex 41 : [Centrale] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n + 1$ (avec $n \in \mathbb{N}$). Pour u et v dans $\mathcal{L}(E)$, on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.
Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $[f, h] = 2f,\ [g, h] = -2g,\ [f, g] = h$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $[f^k, h]$ en fonction de f^k. En déduire que f est nilpotent.
2. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{Ker}\,(f) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que : $h(x) = \lambda x$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $x_k = g^k(x_k)$ (avec le x de la question précédente). Calculer $g(x_k), h(x_k)$ et $f(x_k)$.
4. On suppose que les seuls sous-espaces de E stables par f, g et h sont E et $\{0\}$. Montrer que $(x_0, ..., x_n)$ est une base de E. Montrer que $\lambda = -n$.

Ex 42 : [Mines] Soient $n \geq 2,\ a_1, ..., a_n, x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$. On pose $M = \begin{pmatrix} a_1 + x_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + x_2 & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n & a_n + x_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(M)$.

2. Montrer que : $Sp(M) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(x_i, n|a_i|)$.

Ex 43 : [Mines] Soit u l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{C}[X], \forall z \in \mathbb{C},\ u(P)(z) = e^{-z} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$.

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

2. Quelles sont les valeurs propres de u ?

3. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}[X], \forall z \in \mathbb{C},\ u(P)(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(P)(0)}{n!} z^n$.

Ex 44 : [Mines]

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*,\ tr(M^k) = 0$.

2. Soient G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall M \in G,\ M^N = I_n$. Soit $(M_1, ..., M_p)$ une base de $Vect(G)$.
Montrer que l'application définie sur G par $A \mapsto (tr(AM_1), ..., tr(AM_p))$ est injective. Qu'en déduit-on sur G ?

Ex 45 : [Mines] Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^2 l'est.

Séance du 03/06 : Séries entières et formule de Taylor

Ex 46 : [Centrale]

1. Soit (a_n) une suite tendant vers 0. Montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k = 0$.

On fixe une suite (a_n) et l'on note $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.On suppose que cette série a une rayon de convergence égal à 1 et que $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

2. On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$. Est-ce vrai sans l'hypothèse de positivité ?

3. On suppose $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Ex 47 : [Centrale] On note R le rayon de convergence de $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}d\theta$, pour $0 \leq r < R$ et $p \in \mathbb{N}$.

2. Soit $r \in]0, R[$. On veut montrer que : $\forall z \in B(0,r),\ f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}dt$.

  a. Montrer la formule dans le cas $f : z \mapsto z^n$.

  b. Montrer la formule dans le cas $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

3. Soit f continue sur $B(0,R)$. On suppose que : $\forall r \in]0,R[, \forall z \in B(0,r),\ f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}dt$. Montrer que f est développable en série entière.

Ex 48 : [Centrale]

1. Rappeler et démontrer le théorème de la limite monotone.

2. On pose $a_0 \in]0,\pi[$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sin(a_n)$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

3. Déterminer la nature de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Ex 49 : [Mines] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

3. Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ex 50 : [Mines]

1. Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(k+1)(k+2)}{2^k} x^k$?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^k}$.

Ex 51 : [Mines] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $1/f$ est définie au voisinage de 0.
2. Rappeler pourquoi, pour $\rho \in]-R, R[$, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|\rho^n < M$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$, avec $r \leq R$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que : $\forall x \in]-r, r[,\ \dfrac{1}{f(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Trouver une relation entre (a_n) et (u_n).
4. Montrer que $1/f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Ex 52 : [Mines] Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) = n\ln(n) + an + b + o(1)$.

Séance du 08/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 53 : [Centrale]

1. Montrer qu'il existe une unique suite (H_n) de polynômes tels que :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) t^n.$$

2. Montrer que $H_n' = H_{n-1}$ et $(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$.

3. Montrer que (H_n) forme une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2}dx$.

Ex 54 : [Centrale] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est normale si et seulement si $AA^T = A^TA$.

1. Déterminer les matrices normales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que tout matrice normale stabilise un sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice normale. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que P^TAP soit diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme (a), avec $a \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Ex 55 : [Centrale] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de leur produit sclaire canonique.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^TA)$. En déduire que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^TA)$ (noté r dans la suite).

2. Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(y_1, ..., y_r)$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que la matrice Y de colonnes $y_1, ..., y_r$ vérifie $Y^TA^TAY = D$ où D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

3. Montrer qu'il existe U et V orthogonales et Λ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ayant des coefficients nuls sauf sur la diagonale, et telles que $A = U\Lambda V$.

Ex 56 : [Mines] Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(a,b,c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} dx$. Justifier l'existence de f et trouver son minimum.

Ex 57 : [Mines] Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, montrer que $a_{i,i} > 0$ et $a_{i,j}^2 \le a_{i,i}a_{j,j}$.

2. Montrer que $\displaystyle\max_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}| = \max_{1 \le k \le n} a_{k,k}$.

Ex 58 : [Mines] Soit E un espace préhilbertien. Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille finie de vecteurs de E tels que : $\forall j \in J, \|e_j\| = 1$. On suppose que : $\forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle^2 = \|x\|^2$.

Montrer que $(e_j)_{j\in J}$ est une base orthonormale de E.

Ex 59 : [Mines] Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $A^k = A^T$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que $B = A^{k+1}$ est une matrice de projection orthogonale.

3. Montrer que A induit une isométrie sur $\mathrm{Im}\,(A)$.

4. En déduire A.

Séance du 10/06 : Équations différentielles, calcul différentiel et probabilités

---

Ex 60 : [Centrale]

1. On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages sans remise d'une boule jusqu'à ce que les boules restant dans l'urne soient toutes de la même couleur. Soit X_n le nombre de boules restant après ces tirages. Donner la loi de X_n.
2. On considère maintenant deux urnes contenant chacune n boules. On effectue des tirages sans remise en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable. On s'arrête si l'urne choisie est vide. Soit Y_n le nombre de boules restant à ce moment dans l'autre urne. Donner la loi de Y_n et un équivalent de son espérance.

Ex 61 : [Mines] Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $n \geq m$. On dispose de n cases numérotées de 1 à n, dans lesquelles on répartir aléatoirement m boules. Soit Δ la variable qui donne la différence entre le numéro maximal et minimal des cases non vides. Déterminer la loi et l'espérance de Δ.

Ex 62 : [Centrale] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne canonique. On pose $B = \{x \in E\ ;\ \|x\| < 1\}$.

On considère $f \in \mathcal{C}^2(E, \mathbb{R})$ telle que f est nulle sur $E \setminus \overline{B}$. On pose $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe $x \in B$ tel que $f(x) > 0$ montrer que f admet un maximum sur B.

   Montrer alors que pour un tel maximum x_0, on a $\Delta f(x_0) \leqslant 0$ (on pourra d'abord considérer le cas $n = 1$).
2. On suppose dans cette question qu'il existe $x \in B$ tel que $f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in B$ tel que $\Delta f(x_0) = 0$.
3. Montrer que si $\Delta f \geqslant 0$ alors $f \leqslant 0$.

Ex 63 : [Mines] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{\sqrt{t}} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation différentielle : $(E) : 2xy'' + y' - 2y = 0$.
3. On pose $y(x) = z(\sqrt{x})$. Résoudre (E).
4. Donner l'expression de $f(x)$.

Ex 64 : [Mines] Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $y'' + fy = 0$.

1. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ et $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Que peut-on dire de w ?
2. Montrer que $\mathcal{S}$ contient des fonctions non bornées.

Ex 65 : [Mines] Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sin(xy) \neq -1\}$ et $V = \{(x,y) \in U;\ xy = 0\}$. Soit
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in V \\ \dfrac{\ln(1+\sin(xy))}{xy} & \text{si} \quad (x,y) \in U \setminus V \end{cases}.$$

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et représenter U.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U.

Ex 66 : [Mines] Montrer que les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sont de la forme $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{1+y^2}\right)$, avec $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ex 67 : [Mines] Soient E un espace euclidien, $\|.\|$ la norme de cet espace, φ une forme linéaire sur E et f définie sur E par : $\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f.

Ex 68 : [Mines] Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents de $SL_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Séance du 15/06 : Variables aléatoires

Ex 69 : [Centrale] On lance un dé à N faces jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre strictement inférieur au précédent.

1. Dénombrer les k-uplets strictement croissants à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, puis les k-uplets croissants à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.
2. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués. Calculer $P(X = +\infty)$.
3. On note $a_n = P(X > n)$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n t^n$? Calculer la somme.
4. Calculer l'espérance de X. La variable aléatoire X admet-elle un moment d'ordre 2 ?

Ex 70 : [Mines] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées réelles et ayant un moment d'ordre 4. On pose $m = E(X_1)$, $V_2 = E\left((X_1 - E(X_1))^2\right)$ et $V_4 = E\left((X_1 - E(X_1))^4\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n > 0$, on note A_n^ε l'événement $\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \geq \varepsilon\right)$.

1. Donner une majoration de $P(A_n^\varepsilon)$ à l'aide de n, V_2 et V_4.
2. En déduire que la série de terme général $P(A_n^\varepsilon)$ converge.
3. Montrer que $P\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty}\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon\right) = 0$.

Ex 71 : [Centrale] Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si A est un événement non négligeable, on définit, sous réserve d'existence :

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x|A).$$

1. Montrer que si X admet une espérance finie, alors $E(X|A)$ est bien définie.
2. Si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, calculer $E(X|X > m)$, pour $m \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si X est d'espérance finie, alors $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)E(X|A_k)$.

Ex 72 : [Centrale]

1. Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.
2. Soit (u_n) une suite à valeurs positives sous-additive : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_{n+m} \leq u_n + u_m$.
   Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $L = \inf\left\{\frac{u_k}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquelement distribuées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$. Soit a un réel strictement positif tel que $P(X_1 \geq a) > 0$.
   Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\ln\left(P(S_n \geq na)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Ex 73 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*, (\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Soit Z la variable aléatoire telle que $Z(\omega) = X(\omega)$ si $Y(\omega) \leq m$ et $Z(\omega) = Y(\omega)$ sinon.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.

3. Déterminer les entiers m qui maximisent l'espérance de Z.

Ex 74 : [Mines] Une urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n. On effectue des tirages. Après chaque tirage, on enlève les boules qui ont un numéro supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.

2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $E(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} E(X_k)$.

3. Déterminer un équivalent de $E(X_n)$.

Ex 75 : [Mines] Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(2/3)$. Soit $T = \min\{k \geq 2,\ X_k = X_{k-1} = 1\}$. Calculer l'espérance de T.

Ex 76 : [Mines] Montrer, en utilisant une variable aléatoire, l'inégalité $\dfrac{n-1}{n}2^{4n} \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k}$.

Ex 77 : [Mines]

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les espérances.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs positives admettant un moment d'ordre deux, avec $E(X^2) > 0$. Pour α dans $]0, 1[$, montrer que $P(X \geq \alpha E(X)) \geq (1-\alpha)^2 \dfrac{(E(X))^2}{E(X^2)}$.

3. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires positives indépendantes ayant toute une espérance qui vaut 1 et $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} E\left(\sqrt{X_k}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, $P(|P_n| > \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Séance du 17/06 : Espaces vectoriels normé, suites, fonctions usuelles, dérivation

---

<u>Ex 78</u> : [Centrale] Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. On pose $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ pour tout $u \in E$.

1. Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

On munit désormais E de la norme N_∞.

2. Soit Z l'ensemble des suites nulles à partit d'un certain rang. Montrer que $\mathring{Z} = \emptyset$. Que vaut $\overline{Z}$?

3. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble des suites à valeurs strictement positives.

<u>Ex 79</u> : [Centrale] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathcal{C}(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in GL_n(\mathbb{K})\}$.

1. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(\lambda_1 e_1, ..., \lambda_n e_n)$ soit une base de E. Dans ce cas, pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $A = Mat_B(f) = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$. Exprimer la matrice de f dans la base $(\lambda_1 e_1, ..., \lambda_n e_n)$.

2. Soit T une matrice triangulaire supérieure. Montrer que, si $\mathcal{C}(T)$ est fermé, alors T est diagonalisable.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si A est diagonalisable. Que dire si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

<u>Ex 80</u> : [Centrale]

1. Quels sont les compacts convexes de $\mathbb{R}$?

2. Soit B un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que : $u(B) \subset B$. On pose $u_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u^k$. On pose enfin $A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} u_p(B)$.

- ***a.*** Montrer que $A = \{x \in B,\ u(x) = x\}$.
- ***b.*** Montrer que A n'est pas vide.

<u>Ex 81</u> : [Mines] Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur E.

2. On fixe $f \in E$ et on pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g.

3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leq aN(f)$.

4. N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Ex 82 : [Mines] Soient $\lambda \in]0,1[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=\lambda$. On définit (u_n) par $u_0 \in [0,1]$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. Montrer que, si u_0 est non nul et assez près de 0, alors (u_n) converge vers 0 et qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim C\lambda^n$.

Ex 83 : [Centrale] Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k} = a$ possède une unique solution dans l'intervalle $]n,+\infty[$. On la notera x_n.
2. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Trouver un équivalent simple de (x_n).

Ex 84 : [Centrale]

1. Soit I un intervalle réel et f de classe $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.
2. Donner un exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Soit I un intervalle réel et f une fonction dérivable sur I. Montrer que l'ensemble $C=\{(x,y)\in I^2, x<y\}$ est connexe par arcs.
4. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.