

1. a. À SAVOIR FAIRE PAR COEUR EN 2 SECONDES

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \cos^2 t \, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (1 - \sin^2 t) \, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin t}_{u(t)} \times \underbrace{\sin t (\cos t)^n}_{v'(t)} \, dt \\
&= I_n - \left(\left[\underbrace{\sin t}_{u(t)} \frac{-1}{n+1} (\cos t)^{n+1} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos t}_{u'(t)} \frac{-1}{n+1} (\cos t)^{n+1} \, dt \right) \\
&= I_n - [0 - 0] - \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2} \, dt \\
&= I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}, \text{ d'où} \\
(n+1)I_{n+2} &= (n+1)I_n - I_{n+2}, \text{ finalement :}
\end{aligned}$$

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

b. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} I_{2(p-1)}$. En réitérant le procédé sur $I_{2(p-1)}$, on a : $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} I_{2(p-2)}$ et en poursuivant jusqu'à I_0 , on a : $I_{2p} = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \dots \times 1}{(2p) \times (2p-2) \dots \times 2} I_0$.

On voit dans la fraction que l'on a le produit de tous les nombres impairs entre 1 et $2p-1$ au numérateur. En multipliant la fraction en haut et en base par le produit de tous les nombres pairs entre 2 et $2p$, on a : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{((2p) \times (2p-2) \dots \times 2)^2} I_0$. Par ailleurs dans

$(2p) \times (2p-2) \dots \times 2$, en factorisant chacun des p facteurs par 2, on obtient :

$(2p) \times (2p-2) \dots \times 2 = 2^p (p \times (p-1) \dots \times 1) = 2^p p!$ et donc :

$((2p) \times (2p-2) \dots \times 2)^2 = (2^p p!)^2 = 2^{2p} (p!)^2 = (2^2)^p (p!)^2 = 4^p (p!)^2$.

On remarque que $I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0 x \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2(p-1)+1}$. En réitérant le procédé sur $I_{2(p-1)+1}$,

on a : $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \frac{2p-2}{2p-1} I_{2(p-2)+1}$ et en poursuivant jusqu'à I_1 , on a :

$$I_{2p+1} = \frac{(2p) \times (2p-2) \dots \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \dots \times 3} I_1.$$

On voit dans la fraction que l'on a le produit de tous les nombres impairs entre 1 et $2p+1$ au dénominateur. En multipliant la fraction en haut et en base par le produit de tous les

nombres pairs entre 2 et $2p$, on a : $I_{2p+1} = \frac{((2p) \times (2p-2) \dots \times 2)^2}{(2p+1)!} I_1$. Comme précédem-

ment, on a : $((2p) \times (2p-2) \dots \times 2)^2 = 4^p (p!)^2$.

Par ailleurs $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$. On en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = \ln \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{\frac{3}{2}} e^{-n-1}} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \right) = \ln \left(e \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right)$
 $= \ln \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \ln(e) = -\ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + 1 = -\ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + 1 =$
 $-(n + \frac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 1 = -(n + \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + 1 =$
 $-1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + 1 = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- b. La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge (absolument) grâce à la question précédente, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ . Or nous avons : $\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = e^{u_n}$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = e^\ell > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \text{ existe et elle est strictement positive}$$

Et donc :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

3. a. En utilisant les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} , on a : $I_{2p} I_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2}$ et donc :

$$I_{2p} I_{2p+1} \sim \frac{\pi}{4p}$$

- b. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, car :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1} x - \sin^n x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x (\sin(x) - 1) dx$. Or la fonction \sin est positive sur $[0, \pi/2]$ et la fonction $\sin - 1$ est négative sur ce même intervalle.

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+2} \leq I_{2p+1} \leq I_{2p}$$

- c. Grâce à la question 1.a. nous avons : $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{2p+1}{2p+2}$. Comme I_{2p} est strictement positif, alors en divisant par I_{2p} dans les inégalités précédentes, on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$, soit : $\frac{2p+1}{2p+2} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$. En passant à la limite, on a : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ et donc :

$$I_{2p} \sim I_{2p+1}$$

- d. Les questions 3.a. et 3.c. donnent : $I_{2p}^2 \sim \frac{\pi}{4p}$. En utilisant la question 2.b., on a aussi

$$I_{2p}^2 \sim \left(\frac{C(2p)^{2p+\frac{1}{2}} e^{-2p}}{4^p C^2 p^{2p+1} e^{-2p}} \right)^2 \times \frac{\pi^2}{4} = \left(\frac{2^{2p+\frac{1}{2}} p^{2p+\frac{1}{2}}}{2^{2p} C p^{2p+1}} \right)^2 \times \frac{\pi^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{p}} \right)^2 \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2C^2 p}$$
. En

identifiant les deux équivalents, on a : $\frac{\pi^2}{2C^2} = \frac{\pi}{4}$ et donc $C = \sqrt{2\pi}$.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$