On pose $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

1. On a grâce à un développement par rapport à la dernière ligne (attention il y a un décalage de un entre le numéro de colonne et la puissance sur X) :

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & X & X^2 & \ldots & X^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} X^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{i-2} & x_1^i & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{i-2} & x_2^i & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 1 & x_{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{i-2} & x_{n-1}^i & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

.

Les déterminants intervenant dans cette somme ne comportent pas de X, ce sont donc des scalaires.

$$\boxed{P_n(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]}$$

2. Soit i dans $[\![1, n-1]\!]$. On a : $P_n(x_i) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_i & x_i^2 & \ldots & x_i^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_i & x_i^2 & \ldots & x_i^{n-1} \end{vmatrix} = 0$, car les lignes i et n de ce déterminant sont les mêmes.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ P_n(x_i) = 0}$$

3. Supposons dans un premier temps que les $x_1, ..., x_{n-1}$ soient deux à deux distincts. Ainsi P_n est un polynôme de degré au plus $n-1$ ayant $n-1$ racines distinctes $x_1, ..., x_{n-1}$, alors $P_n = a \prod_{j=1}^{n-1} (X - x_j)$, avec a le coefficient dominant (en X^{n-1}) de P_n. Or la première question nous dit que c'est exactement $D_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Ainsi : $P_n(X) = D_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (X - x_j)$. Or $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j)$.

Supposons qu'il existe i, j dans $[\![1, n-1]\!]$ tels que $x_i = x_j$. Ainsi $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $D_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, sont tous les deux nuls car les lignes i et j sont identiques. Ainsi la formule d'avant est encore juste, donc

$$\boxed{D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j)}$$

4. Montrons cela par récurrence sur n.

Pour $n = 2$, on a $D_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le j < i \le 2} (x_i - x_j)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et supposons la proposition vraie pour n.

Grâce à la question précédente, on a :

$D_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{n} (x_{n+1} - x_j)$. Or grâce à l'hypothèse de récurrence, on a : $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$, donc :

$D_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \prod_{j=1}^{n} (x_{n+1} - x_j) = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j)$, car le terme en $i = n+1$ de ce produit est $\prod_{1 \le j < i = n+1} (x_{n+1} - x_j) = \prod_{j=1}^{n} (x_{n+1} - x_j)$. D'où la propriété pour $n+1$, ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)}$$

5. $\boxed{D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0}$, s'il existe i et j dans $[\![1, n]\!]$, avec $i \neq j$ et $x_i = x_j$, car ce déterminant possède deux lignes égales.