Correction des exercices du 30/09/2024 (Séries et algèbre linéaire)

<u>Ex 1</u> : CV de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+\sin(n)}$.

Correction : On a : $\dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+\sin(n)} = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}} \times \dfrac{1}{1+\frac{\sin(n)}{n^{3/4}}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}} \times \left(1 - \dfrac{\sin(n)}{n^{3/4}} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/4}}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}} \times \left(1 + O\left(\dfrac{1}{n^{3/4}}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Or grâce au théorème spécial des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}}$ converge (la suite $\left(\dfrac{1}{n^{3/4}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle). De plus la série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge. Ainsi $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+\sin(n)}$ converge.

<u>Ex 2</u> : CV et calcul de $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Correction : On a : $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$. Par comparaison de série est termes négatifs, $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.

Soit $N \geq 2$. On a : $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right) =$
$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N}[\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n)] = \sum_{n=2}^{N}\ln(n-1)+\sum_{n=2}^{N}\ln(n+1)-2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) =$
$\sum_{p=1}^{N-1}\ln(p) + \sum_{k=3}^{N+1}\ln(k) - 2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) = \underbrace{\sum_{n=2}^{N-1}}_{\ln(1)=0}\ln(n) + \sum_{n=3}^{N+1}\ln(n) - 2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) =$

$\left(\ln(2) + \sum_{n=3}^{N-1}\ln(n)\right) + \left(\sum_{n=3}^{N-1}\ln(n) + \ln(N) + \ln(N+1)\right) - 2\left(\ln(2) + \sum_{n=3}^{N-1}\ln(n) + \ln(N)\right) =$
$-\ln(2) + \ln(N) + \ln(N+1) - 2\ln(N) = -\ln(2) + \ln(N+1) - \ln(N) = -\ln(2) + \ln\left(\dfrac{N+1}{N}\right) =$
$-\ln(2) + \ln\left(1+\dfrac{1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\to} -\ln(2)$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)}$$

<u>Ex 3</u> : Soient $E_1,\dots,E_n$ et $F_1,\dots,F_n$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $E_i \subset F_i$ et : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Montrer que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ E_i = F_i$.

Correction : Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $x \in F_i$ qui est donc dans $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Comme on a aussi $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, alors il existe $(e_1, ..., e_n) \in E_1 \times ... \times E_n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Comme on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ E_i \subset F_i$ et donc : $\underbrace{0}_{F_1} + ... + \underbrace{0}_{F_{i-1}} + \underbrace{x}_{\in F_i} + \underbrace{0}_{F_{i+1}} + ... + \underbrace{0}_{F_n} = \underbrace{e_1}_{\in F_1} + ... + \underbrace{e_{i-1}}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{f_i}_{\in F_i} + \underbrace{e_{i+1}}_{\in F_{i+1}} + ... + \underbrace{e_n}_{\in F_n}$. Cette décomposition est unique, car $F_1, ..., F_n$ sont en somme directe, donc on peut identifier et donc $x = e_i \in E_i$. On a donc : $F_i \subset E_i$, puis $F_i = E_i$.

Fin de la correction des exercices de TD

<u>Ex 4</u> :

1. Étudier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} u_k$, avec $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k} + k\sqrt{k}}$.

2. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq R_n \leq 2\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3. Montrer que $R_n -\ \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) -\ \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Correction :

1. Fait en TD

2. Fait en TD

3. Grâce à la question précédente, on a :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq R_n - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

ce qui donne :

$$\left|R_n -\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) -\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) -\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction Arctan est continue sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et dérivable sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$ et on a : $\forall x \in \left]\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[,\ \operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$. Donc grâce aux inégalité des accroissements finis, on a :

$$\left|\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) -\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| \leq 1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{2n} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

ce qui donne le résultat.

<u>Ex 5</u> : Cv de $\sum u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\beta}\left(\dfrac{2\cdot 4 ... (2n)}{3 \cdot ... (2n+3)}\right)^\alpha,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Correction :

En multipliant la fraction au numérateur et au dénominateur par $2 \times 4 \times \cdots (2n) \times (2n+2)$, on a :

$$u_n = \frac{(2n+2)^\alpha}{n^\beta} \frac{(2^2 \cdot 4^2 ... (2n)^2)^\alpha}{((2n+3)!)^\alpha} = \frac{(2n+2)^\alpha}{n^\beta} \frac{\left(2^{2n}(n!)^2\right)^\alpha}{((2n+3)!)^\alpha} \sim \frac{2^\alpha}{n^{\beta-\alpha}} \frac{\left(4^n \times 2\pi n \times n^{2n}/e^{2n}\right)^\alpha}{\left(\sqrt{2\pi(2n+3)} \times (2n+3)^{2n+3}/e^{2n+3}\right)^\alpha} \sim$$

$$\frac{(4\pi)^{\alpha}\times e^{3\alpha}}{n^{\beta-\alpha}}\frac{(4^n\times n^{2n+1})^{\alpha}}{\left(\sqrt{4\pi n}\times 2^{2n+3}n^{2n+3}(1+3/2n)^{2n+3}\right)^{\alpha}}=\frac{(4\pi)^{\alpha/2}\times e^{3\alpha}}{2^{3\alpha}n^{\beta-\alpha}}\frac{1}{\left(n^{5/2}(1+3/2n)^{2n+3}\right)^{\alpha}}=$$
$$\frac{K}{n^{\beta+3\alpha/2}}\frac{1}{\left((1+3/2n)^{2n+3}\right)^{\alpha}}.$$

Or on a : $(1+3/2n)^{2n+3}=e^{(2n+3)\ln(1+3/2n)}$, mais $(2n+3)\ln(1+3/2n)\sim 2n\times\dfrac{3}{2n}=3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+3/2n)^{2n+3}=e^3$, donc $u_n\sim\dfrac{K'}{n^{\beta+\alpha/2}}$, avec $K'>0$. Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge ssi $\beta+3\alpha/2>1$.