Séance du 15/05 : Algèbre linéaire

<u>Ex 1</u> : [Mines] On veut déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(*)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{2i\pi P(n)} = 1$.

On pose $B_0 = 1$ et : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B_k = \dfrac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}$.

1. Soit P vérifiant $(*)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(B_0, ..., B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
3. Montrer que P dans $\mathbb{R}[X]$ vérifie $(*)$ si et seulement si P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des B_k.

<u>Ex 2</u> : [Mines] Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note u l'endomorphisme de E vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u(e_n) = e_{n+1}$ et on pose $\Phi : v \mapsto u \circ v - v \circ u$ qui est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que Φ n'est pas injective.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi$ est de dimension infinie.
3. Montrer que, pour tout $x_0 \in E$ et $w \in \mathcal{L}(E)$, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi(v) = w$ et $v(e_0) = x_0$.

<u>Ex 3</u> : [Mines] Soient $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < x_n < y_n$ des réels et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. On suppose que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$. Montrer que $P = 0$.
2. Montrer que l'on peut trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$.

<u>Ex 4</u> : [Mines] Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $1 < p < n$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in GL_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto Y$ est un isomorphisme de $\operatorname{Ker} M$ dans $\operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B)$.
2. En déduire que $\operatorname{rg}(M) = p$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

   Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $p = \max\{\operatorname{rg}(M),\ M \in V\}$. Le but des questions suivantes est de montrer que V est de dimension inférieure ou égale à np.

3. Pourquoi peut-on supposer sans perdre de généralité que $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à V ? On fait cette hypothèse dans la suite.
4. Soit $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix},\ A \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \right\}$. Montrer que $V \cap W = \{0\}$.
5. Conclure.

Ex 5 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des formes linéaires φ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telles que : $\forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ \varphi(uv) = u(0)\varphi(v) + v(0)\varphi(u)$.

1. Vérifier que $\mathcal{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathbb{R})$. Déterminer $\mathcal{D}_1$.
2. Déterminer $\mathcal{D}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex 6 : [Centrale] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que u stabilise toutes les droites de E. Montrer que u est une homothétie.
2. On suppose que $tr(u) = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.
3. Montrer que M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle si et seulement s'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

Ex 7 : [Centrale] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\varphi_A : M \mapsto tr(AM)$ et $\tau_A : M \mapsto AM - MA$.

1. On suppose A nilpotente. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\tau_A) \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi_A)$.
2. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = AB - BA$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(A)B - BP(A)$ en fonction de A et $P'(A)$. En déduire que A est nilpotente.
3. Montrer réciproquement que, si A est nilpotente, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = AB - BA$ (on pourra montrer que $\mathrm{Im}\,(\tau_A) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Ker}\,(\tau_A) \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi_N)\}$).

Séance du 16/05 : Intégration

Ex 8 : [Mines]

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. Décomposer $X^{2n} - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ pour n dans $\mathbb{N}^*$.

3. En utilisant une somme de Riemann, calculer $f(x)$.

Ex 9 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Relier les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)f'(t)cotan(\pi t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)(1 + cotan^2(\pi t))dt$ (on jusitifiera l'existence des différentes intégrales).

2. Majorer $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)(1 + cotan^2(\pi t))dt$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2 dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)cotan^2(\pi t)dt$.

3. En déduire que $K \displaystyle\int_0^1 f^2 \leq \int_0^1 (f')^2$, avec K une constante à préciser.

Ex 10 : [Mines] Soit $f : x \mapsto e^{x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Étudier la monotonie de f.

2. Déterminer la limite et un équivalent de f en chacune des bornes de son domaine de définition.

Ex 11 : [Mines]

1. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \sin(t)}{1 + t^4} dt$.

2. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^3 \sin(t)}{1 + t^4} dt$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{t^3 \sin(t)}{1 + t^4} dt$ quand n tend vers $+\infty$.

Ex 12 : [Mines] Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Convergence et calcul de $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(t - y)^2 + x^2} dt$.

Ex 13 : [Mines] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{xu\ln(u)}du$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Soit g une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(u)e^{-xu}du$ tend vers $g(0)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Que peut-on dire si g est supposée intégrable au lieu de bornée ?

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x)$.

Ex 14 : [Mines] On munit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C}),\ \ f(0) = f(1) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ de la norme uniforme.

1. Montrer que $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ f & \mapsto & f'' \end{array} \right.$ est un isomorphismes.

2. Soit $g \in F$. Montrer que $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 |x-t|g(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer G''.

3. Trouver un élément $k \in \mathcal{C}^0([0,1]^2,\mathbb{C})$ tel que pour tout $g \in F$, Φ^{-1} soit l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 k(x,t)g(t)dt$.

4. Montrer l'existence de $\displaystyle\sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|\Phi^{-1}(g)\|_\infty$ et le calculer.

Séance du 17/05 : Algèbre générale

Ex 15 : [Centrale] Soit G un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$.
On dit que G est distingué lorsque : $\forall g \in G, \forall h \in SO_3(\mathbb{R}),\ hgh^{-1} \in G$. On suppose dans tout l'exercice que G est distingué. On note K la composante connexe par arcs de I_3 dans G.

1. Montrer que K est un sous-groupe de G et qu'il est distingué.

2. On suppose que $K \neq \{I_3\}$.

   a. Montrer que K contient une matrice de rotation d'angle de mesure π.

   b. Montrer que K contient toutes les matrices de rotation d'angle de mesure π. On admet que cela implique que $K = SO_3(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $G = \{I_3\}$ ou $G = SO_3(\mathbb{R})$.

Ex 16 : [Centrale] Soit $(G, .)$ un groupe commutatif fini de cardinal n et de neutre e. Pour $d \in \mathbb{N}^*$ divisant n, soit $G_d = \{x \in G,\ x^d = e\}$. On écrit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de n en facteurs premiers.

1. Vérifier que G_d est un sous-groupe de G.

2. Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{r} G_{p_i^{\alpha_i}} & \to & G \\ (x_1, ..., x_r) & \mapsto & x_1...x_r \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

On suppose désormais que pour tout diviseur d de n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $|G_d| \leq d$.

3. Montrer que pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, il existe g_i dans G d'ordre $p_i^{\alpha_i}$. En déduire que G est cyclique.

Ex 17 : [Centrale] Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

1. Montrer que $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & A \\ k & \mapsto & k1_A \end{array} \right.$ est le seul morphisme d'anneau de $\mathbb{Z}$ dans A. Montrer qu'il existe $k_A \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f_A) = k_A\mathbb{Z}$.

2. On suppose que A est un corps. Montrer que $k_A = 0$ ou que k_A est premier. Étudier la réciproque.

On suppose que A est un corps fini et on admet que $|A| = p^n$, avec p premier et $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $\varphi : x \mapsto x^p$ définie sur A. Montrer que φ est un automorphisme de A. Déterminer l'ordre de φ dans $(Aut(A), \circ)$.

Ex 18 : [Centrale]

1. Montrer que $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. Un nombre complexe z est un nombre algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients rationnels dont z est racine.

   On note A l'ensemble des nombres algébriques.

   a. Montrer que A est dénombrable.
   b. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est algébrique si et seulement si $\mathbb{Q}[z] = \{P(z),\ P \in \mathbb{Q}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
   c. Montrer que A est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
3. Déterminer $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(z) = 0$, avec $z = \sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$.

Ex 19 : [Mines] Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si, pour tout entier $n \geq (a-1)(b-1)$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $au + bv = n$.

Ex 20 : [Mines] Soit A un anneau commutatif. Un idéal I de A est dit premier lorsque :
$\forall (a, b) \in A^2,\ ab \in I \Rightarrow (a \in I \ \text{ OU } \ b \in I)$.

1. On suppose $A \neq \{0\}$. Montrer que $\{0\}$ est premier si et seulement si A est intègre.
2. Trouver les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Montrer que $P\mathbb{K}[X]$ est premier.
4. Soit I un idéal différent de A. Il est dit maximal lorsqu'on ne peut pas intercaler d'idéal strictement entre I et A. Montrer que $\{0\}$ est un idéal maximal si et seulement si A est un corps.
5. Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$.
6. Montrer que tout idéal maximal de A est premier.

Ex 21 : [Mines] Soit $a \geq 2$ un entier

1. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^m + 1$ soit premier. Montrer que a est pair et que m est une puissance de 2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.
3. Si m et n sont deux éléments distincts de $\mathbb{N}$, montrer que $F_m \wedge F_n = 1$.
4. Retrouver le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Séance du 23/05 : Probabilité, dénombrement

Ex 22 : [Centrale] On note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$. Si P est une telle partition et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\sigma.P$ la partition formée des $\sigma(A)$, pour $A \in P$.

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ fixée. Pour P et Q deux partitions de $[\![1,n]\!]$, on pose $P \sim Q$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $Q = \sigma^k.P$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On prend pour σ un p-cycle avec p premier. Montrer que les classes d'équivalence sont de cardinal 1 ou p.
3. Soit p premier. On considère ici les partitions de $[\![1,n+p]\!]$ et on note σ le p-cycle $(1,2,...,p)$. Montrer que si $\sigma.P = P$, alors soit $[\![1,p]\!]$ est inclus dans une partie A de la partition P, soit tous les singletons $\{1\},...,\{p\}$ sont dans la partition P. En déduire que $B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} [p]$.

Ex 23 : [Centrale]

1. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé. Montrer la formule du crible :
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)\right).$$
2. On définit la fonction de Möbius : $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1,0,1\}$ par : $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un entier différent de 1, $\mu(n) = (-1)^k$, si n est le produit de k nombres premiers distincts. On tire un couple (a,b) de $[\![1,n]\!]^2$ selon la loi uniforme. Quelle est la probabilité que a et b soient premiers entre eux ? On exprimera le résultat sous forme d'une somme à l'aide de μ.

Ex 24 : [Mines] Soient $E = [\![1,n]\!]$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il existe une unique bijection g de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que : $\forall F \in \mathcal{F},\ g(F) \cap F = \emptyset$.

Ex 25 : [Mines] On considère N personnes ($N \geq 1$) qui montent dans un ascenseur au rez-de-chaussée d'un immeuble de m étages ($m \geq 1$) et qui descendent à un étage au hasard (le rez-de chaussée n'est pas compté comme un étage). On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'arrêts de l'ascenseur. On note $Y_{i,j}$ la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le passager j descend à l'étage i et X_i la variable qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i.

1. Déterminer les lois des variables $Y_{i,j}$ et X_i.
2. Calculer $E(X)$.
3. Exprimer la loi de X en utilisant le nombre $s_{n,p}$ de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

Ex 26 : [Mines] Soient X une variable aléatoire réelle discrète, X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de X. On suppose que $X_1 + X_2 \sim 2X$.

1. Montrer que si X est dans L^2, alors X est presque-sûrement constante.
2. Démontrer le même résultat sous l'hypothèse X minorée.
3. Démontrer le même résultat dans le cas général (on pourra considérer $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x)$ soit maximal).

Ex 27 : [Mines]

1. Par un argument de dénombrement, montrer que : $\forall a, b, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

2. Deux joueurs A et B procèdent, chacun à leur tour, à une série de n lancers à pile ou face avec une pièce équilibrée. On note X la différence entre le nombre de piles obtenus par A et le nombre de piles obtenus par B. Déterminer la loi de X. Calculer $E(X), V(X)$ et $E(|X|)$.

Ex 28 : [Mines] Soit p un nombre premier impair.

1. Déterminer le cardinal de $C = \{k^2,\ k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.

2. Soient A et B deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de solutions de $x^2 + Ax + B = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de N.

Séance du 25/05 : Matrices et déterminant

<u>Ex 29</u> : [Centrale]

1. Soit $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant de la matrice $V(c_1, ..., c_n) = [c_i^{j-1}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $V_i(c_1, ..., c_n) = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{i-1} & c_1^{i+1} & \cdots & c_1^n \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2^{i-1} & c_2^{i+1} & \cdots & c_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^{i-1} & c_n^{i+1} & \cdots & c_n^n \end{pmatrix}$ et on note

$S_k = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} c_{i_1}...c_{i_k}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$.

a. Exprimer les coefficients de $P(X) = (X - c_1)...(X - c_n)$ en fonction de $S_1, ..., S_n$.

b. Calculer le déterminant de $V_i(c_1, ..., c_n)$.

3. Discuter de l'inversibilité de $V(c_1, ..., c_n)$ et donner les coefficients de son inverse éventuel.

<u>Ex 30</u> : [Centrale] Soient G un groupe fini et f un morphisme de groupes de G dans $GL_n(\mathbb{C})$ et on pose $M = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G} f(g)$. Soit c l'application définie par : $\forall g \in G,\ c(g) = tr(f(g))$.

1. Soit $g \in G$. Montrer que $f(g)$ est diagonalisable.

2. Soit $g \in G$. Montrer que $c(g^{-1}) = \overline{c(g)}$ et que : $|c(g)| \leq n$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(M - I_n) = \{X \in \mathbb{R}^n,\ \forall g \in G,\ f(g)(X) = X\}$.

4. Montrer que $tr\left(\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G} f(g)\right)$ est dans $\mathbb{N}$.

<u>Ex 31</u> : [Centrale] On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} soient à coefficients entiers.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ |det(M)| = 1\}$.

2. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^d = I_n$ et $A = \dfrac{1}{3}(M - I_n)$. Étudier la convergence de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer un majorant K_n du cardinal des sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$.

<u>Ex 32</u> : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :
$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i - j \equiv 1[2] \Rightarrow m_{i,j} = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow Com(M) \in \mathcal{D}$.

<u>Ex 33</u> : [Mines] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M = [(i + j + \alpha)^2]_{1\leq i,j\leq n}$. Déterminer le rang de M.

Ex 34 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, ..., A_n$ des éléments nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux. Calculer $A_n A_{n-1} ... A_1$.

Ex 35 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ vérifiant : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f = aTr$.

Séance du 31/05 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 36 : [Centrale] Soient $F : x \mapsto \sum_{m,n \geq 1} \frac{1}{mn(m+n+x)}$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $F(x)$ est définie pour $x > -2$.

2. Montrer que $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2H_k}{(k+1)(k+1+x)}$.

3. Calculer $F(1)$.

Ex 37 : [Centrale] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. On pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $S_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx}$ et $D_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$ pour $N \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_a^b \phi(t) e^{ixt} dt = 0$, pour $\phi \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D_N(u) du$.

3. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ D_N(u) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$.

4. Montrer que $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$, puis que la convergence est uniforme.

Ex 38 : [Centrale] On donne : $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

1. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(px) dx$.

2. On considère $g : x \mapsto \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} g^2$.

3. Montrer que : $\forall x \in [-\pi, \pi],\ g(x) = x^2$.

Ex 39 : [Mines] Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\tan\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)\right)$.

Ex 40 : [Mines] On définit $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple, puis normale de $\sum f_n$.
2. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x}$. La fonction S est-elle dérivable en 0 ?
4. Déterminer un équivalent de $\dfrac{S(x)}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Ex 41 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$, $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer l'existence de $l \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tel que $x_n = l + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. Exprimer u_{2n} en fonction de v_{2n} et w_n.
3. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge et exprimer sa limite en fonction de γ.

Ex 42 : [Mines]

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \ln(x)}{x-1}$ définie sur $]0,1[$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On notera encore f le prolongement ainsi obtenu.
2. Montrer que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$ converge vers 0.
3. Trouver un équivalent de I_n.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x^n)dx = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Séance du 02/06 : Réduction

Ex 43 : [Centrale] Soit Γ une partie de $GL_n(\mathbb{C})$ non vide, compacte stable par multiplication. Soit $A \in \Gamma$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module 1.
2. Soit $\lambda \in Sp(A)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)^2$.
3. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A, et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ leurs multiplicités. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$ et en déduire que A est diagonalisable.

Ex 44 : [Centrale] Soient $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_{A_1} et χ_{A_2}.
2. Exprimer χ_{A_n} en fonction de $\chi_{A_{n-1}}$ et $\chi_{A_{n-2}}$.
3. Si λ est valeur propre de A_n, montrer que $\chi_{A_{n+1}}(\lambda)\chi_{A_{n-1}}(\lambda) < 0$.
4. Montrer que A possède n valeurs propres distinctes.
5. Montrer que les spectres de A_n et A_{n+1} sont entrelacés (si $x_1 < .... < x_n$ sont les valeurs propres de A_n et $y_1 < ... < y_{n+1}$ sont les valeurs propres de A_{n+1}, alors $y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < ... < y_n < x_n < y_{n+1}$).

Ex 45 : [Centrale] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et Φ_A et Ψ_B les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi_A(M) = AM$ et $\Psi_B(M) = MB$.

1. Déterminer les polynômes minimaux de Φ_A et Ψ_B. À quelle condition ces endomorphismes sont diagonalisables ?
2. On suppose A et B diagonalisables. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de matrices de rang un qui diagonalisent Φ_A et Ψ_B.

Ex 46 : [Mines] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ I_n & A \end{pmatrix}$.

1. Exprimer le polynôme minimal de B en fonction de celui de A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Ex 47 : [Mines] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$ de multiplicité m. Montrer que $\dim(E_\lambda(u)) = m$ si et seulement si $E = E_\lambda(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u - \lambda Id_E)$.

Ex 48 : [Mines] Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in G$, on a : $M^2 = I_n$.

1. Montrer que G est commutatif.

2. Montrer $|G| \leq 2^n$.

3. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, montrer que les deux groupes $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_p(\mathbb{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = p$.

Ex 49 : [Mines] Soit $n \geq 2$. On pose $J = [J_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $J_{i+1,i} = 1$, pour $1 \leq i \leq n-1$, $J_{1,n} = 1$, les autres coefficients étant nuls.

1. Déterminer le polynômes caractéristique et le polynôme minimal de J.

Soient $X_0, ..., X_{n-1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On considère la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X_0 & X_{n-1} & \cdots & \cdots & X_1 \\ X_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ X_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & \cdots & X_2 & X_1 & X_0 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer M en fonction de J.

3. Pour $n = 2$, calculer $P(M \in GL_2(\mathbb{R}))$.

4. Déterminer le spectre (complexe) de M.

5. On suppose que n est premier, et on admet que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Calculer $P(M \in GL_n(\mathbb{R}))$.

Séance du 06/06 : Séries entières, dérivation

Ex 50 : [Centrale] Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+e^x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier les variations de f. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ le point en lequel f atteint son maximum.

2. Montrer que, pour tout $x \in]0,\alpha[$, il existe un unique $y \in [\alpha,+\infty[$ tel que $f(x) = f(y)$.

On pose $y = \phi(x)$.

3. Montrer que ϕ est continue sur $]0,\alpha]$. Déterminer la limite et donner un équivalent de ϕ en 0 par valeurs supérieures.

Ex 51 : [Centrale] Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ n'appartenant pas à $\{-n, ,\ n \in \mathbb{N}\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{(a+k)(b+k)}{(c+k)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n z^n$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série entière précédente converge absolument en tout point du cercle de centre 0 et de rayon R.

Ex 52 : [Centrale] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,\pi/2[$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \dfrac{dt}{1+\sin(t)}$.

1. Étudier la limite de (u_n) et le comportement de le suite (a_n).

2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ diverge et que la série $\sum u_n^3$ converge.

3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$. Quel est son rayon de convergence ? Étudier son comportement en 1 et -1.

Ex 53 : [Mines] Soit $\sum a_n$ une série numérique convergente. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la série de fonction $\displaystyle\sum_{p\geq 0} F^{(p)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$:

  a. lorsque $\sum a_n$ converge absolument ;

  b. dans le cas général

Ex 54 : [Mines]

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, ..., a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $b_1 < ... < b_p$ des réels.

Montrer que $f_p : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i e^{b_i x}$ s'annule au plus $p-1$ fois.

2. Soient $\alpha_1 < ... < \alpha_n$ et $\beta_1 < ... < \beta_n$ des réels. Montrer que $\det([e^{\alpha_i \beta_j}]_{1 \leq i,j \leq n}) > 0$.

Ex 55 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1 + x^n})$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et calculer ses dérivées successives en 0.

Ex 56 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et $f^{(n+1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in [0, 1]$, il existe $g_{n+1}(x, h) \in \mathbb{R}$ tel que :
$\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \right| = |f(x+h) - f(x) - g_{n+1}(x, h)|$ et $|g_{n+1}(x, h)| \leq \dfrac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} h^{n+1}$.

2. Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

3. En déduire que $f', f'', ..., f^{(n-1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Séance du 08/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 57 : [Centrale] Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \leq n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que la fonction $X \mapsto \|AX - B\|_2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^p$ et qu'il est atteint en un unique point X_0.
2. Montrer que X_0 est l'unique solution de $A^T AX = A^T B$.
3. Calculer $\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2,\ x,y \in \mathbb{R}\}$.

Ex 58 : [Centrale] Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension au moins deux. On note $\|.\|$ la norme associée. Soit $f : E \to E$ une application vérifiant :

- $\forall x,y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$;
- $\forall x,y \in E,\ \langle x,y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.

1. Montrer :
   a. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{Q},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$;
   b. $\forall x,y \in E,\ \|x\| = \|y\| \Rightarrow \|f(x)\| = \|f(y)\|$;
   c. Montrer que f est bornée sur $\overline{B}(0,1)$.
2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq C\|x\|$. En déduire que f est linéaire.
3. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $h \in O(E)$ tel que : $f = \alpha h$.

Ex 59 : [Centrale] Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. On pose
$S = \left\{ s \in \mathcal{L}(E),\ \exists u \in O(E),\ s = \dfrac{u + u^{-1}}{2} \right\}$.

1. Soit $s \in S$. Montrer que s est autoadjoint et que ses valeurs propres sont dans $[-1,1]$.
2. Montrer que les valeurs propres de s appartenant à $]-1,1[$ sont de multiplicité paire.
3. Réciproquement, soit $s \in S(E)$ à valeurs propres dans $[-1,1]$ et dont les valeurs propres appartenant à $]-1,1[$ sont de multiplicité paire. Montrer que s est dans S.

Ex 60 : [Centrale] Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = P^T P$ et $B = P^T DP$.
2. On suppose maintenant que B est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta$.

Ex 61 : [Mines] Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :
$\forall i,j\in [\![1,p]\!],\ i\neq j \Rightarrow \langle x_i,x_j\rangle<0$. On pose $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$ et $y=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}|\lambda_i|x_i$, avec $\lambda_1,...,\lambda_p\in\mathbb{R}$.

1. Comparer $\|x\|$ et $\|y\|$.
2. Montrer que si $x=0$, alors les λ_i sont tous nuls ou tous non nuls.
3. Montrer que toute sous-famille à $p-1$ vecteurs des x_i est libre.
4. Donner un exemple d'une telle famille dans $\mathbb{R}^2$, avec $p=3$.
5. Montrer qu'il existe une famille $(x_1,...,x_{n+1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses.

Ex 62 : [Mines] Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dont l'image par f est orthogonale.

Ex 63 : [Mines] Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs de E (pas nécessairement orthogonaux) tels que $|||p-q|||<1$. Montrer que p et q ont le même rang.

Séance du 12/06 : Équations différentielles, calcul différentiel, fonctions vectorielles

---

<u>**Ex 64**</u> : [Centrale]

1. Soient $U, V \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = U$, puis que $tr(UV) \geq 0$.

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $t \mapsto tr(P(f(t)))$ est dérivable et calculer sa dérivée.

3. Soient $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que : $B - A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(\exp(A)) \leq tr(\exp(B))$.

<u>**Ex 65**</u> : [Centrale] Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \dfrac{1}{2} \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

1. Montrer que J est strictement convexe :
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in]0, 1[, x \neq y \Rightarrow J(tx + (1 - t)y) < tJ(x) + (1 - t)J(y)$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$.

3. En déduire que J admet un minimum, atteint en un unique point.

<u>**Ex 66**</u> : [Mines] Soit $E_n = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0 \right\}$. Montrer que E_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on donnera la dimension et une base.

<u>**Ex 67**</u> : [Mines] Soit $S : \mathbb{R} \mapsto S_n(\mathbb{R})$ une fonction continue telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Sp(S(t)) \subset] - \infty, -1]$. Montrer que toutes les solutions du système $X'(t) = S(t)X(t)$ ont une limite nulle en $+\infty$.

<u>**Ex 68**</u> : [Mines] On pose $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et on définit f sur D par $f(x, y) = \dfrac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étudier les extrema de f.

Ex 69 : [Mines] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I^2, I)$ vérifiant :

- $\forall x, \in \mathbb{R},\ f(x,x) = x$;
- $\forall (x,y) \in I^2,\ f(x,y) = f(y,x)$.

1. Montrer que : $\forall x \in I,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x) = \dfrac{1}{2}$ et simplifier $df(x,x)$ pour $x \in I$.

On fixe dans la suite un segment S de I tel que : $\forall (x,y) \in S^2,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 1$.

2. Soit $(x,y) \in S^2$ tel que $x \leq y$. On pose $\varphi : t \mapsto f(t, x+y-t)$ définie sur $[x,y]$. Montrer que $\left|\varphi(x) - \varphi\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right| \leq \dfrac{y-x}{2}$.

3. En déduire que : $f(S^2) \subset S$.

4. On se donne $g \in \mathcal{C}^1(I^2, I)$ ayant les mêmes propriétés que f (y compris vis-à vis de S), et l'on se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I^2 telle que u_0 soit dans S^2 et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (f(u_n), g(u_n))$. On suppose que $f \leq g$. Montrer que u est convergente.

Ex 70 : [Mines] Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$.

Séance du 14/06 : Variables aléatoires

Ex 71 : [Centrale] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire sur cet espace, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $P(X > 1) > 0$ et d'espérance finie m.
Soit $(X_{i,n})_{(i,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires suivant la même loi que X. On pose $Y_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{Y_n} X_{i,n+1}$ (avec $Y_{n+1} = 0$ si $Y_n = 0$). On note G la fonction génératrice de X, et G_n celle de Y_n (pour $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que G et G' sont strictement croissante sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $G_{n+1} = G_n \circ G$, pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de $E(Y_n)$.
3. On note $Z = \inf\{n \in \mathbb{N},\ Y_n = 0\}$ qui est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $P(Z < +\infty)$ est le plus petit point fixe de G.
4. Montrer que $P(Z < +\infty) = 1$ si et seulement si $m \leq 1$.

Ex 72 : [Mines] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes avec $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, q)$. Montrer que $X + Y$ suit une loi binomiale si et seulement si $p = q$.

Ex 73 : [Mines] Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + ... + X_n$ et on pose
$M = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\},\ S_n \geq m\}$ qui est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que M est une variable aléatoire et évaluer $P(M = +\infty)$.
2. Montrer que $P(M \geq n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$, avec $q = 1 - p$.
3. Montrer que M est d'espérance finie et la calculer.
4. Calculer la variance de M.

Ex 74 : [Mines] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Y = \sup\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_1 = X_2 = ... = X_k\}$ qui est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Déterminer la loi et l'espérance de Y.
2. Soit $Z = \sup\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_{Y+1} = ... = X_{Y+k}\}$. Déterminer la loi et l'espérance de Z.

Ex 75 : [Mines]

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, majorée par un réel M.
   Montrer que : $E(Y) \leq MP(Y \geq 1)$.
2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = card\{X_1, ..., X_n\}$. Montrer que $E(R_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (X_i = k)\right)$.
3. On suppose que les X_i suivent une loi géométrique de paramètre p. Donner un équivalent de $E(R_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Ex 76 : [Mines] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Justifier qu'il existe un espace probabilisé Ω et une variable aléatoire X définie sur cet espace telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall t \in [0,1],\ G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}$.

2. Donner un équivalent de $P(X = n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ P(X \geq (\lambda+1)\alpha) \leq \dfrac{2}{\lambda^2 \alpha}$.

Ex 77 : [Mines] On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $n \geqslant 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires deux à deux indépendantes, suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Déterminer la loi de la variable (X_1, S_n).

2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = k)$, où $k \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant $(X_1 = \varepsilon)$, où $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Séance du 16/06 : Espaces vectoriels normé, suites, fonctions usuelles

---

Ex 78 : [Centrale] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout intervalle I, $f(I)$ est un intervalle.

1. Montrer que ces hypothèses n'impliquent pas la continuité de f.
2. On suppose de plus que, pour tout y de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est fermé. Montrer que f est continue.

Ex 79 : [Centrale] On cherche les morphismes de groupes continus de $\mathbb{U}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. Soit φ un tel morphisme. On pose $\tilde{\varphi} : t \mapsto \varphi(e^{it})$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \tilde{\varphi}(t)dt = I_n$.
2. Montrer que $\tilde{\varphi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{\varphi}(t) = e^{tA}$.
3. Conclure.

Ex 80 : [Centrale] Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_1 \in [0,1]$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

1. Montrer que $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérance de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un segment non vide de $[0,1]$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un point fixe l de f.

Ex 81 : [Mines] Soient X un compact d'un espace vectoriel normé et $f : X \to X$ une application telle que : $\forall x, y \in X,\ \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$.

1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et :
$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$. Montrer que (a,b) est une valeur d'adhérence de $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que f est une isométrie : $\forall x, y \in X,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
3. Montrer que f est bijective.

Ex 82 : [Mines] On note E l'ensemble des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$, on pose $N_p(f) = \displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^p e^{-|t|} f(t)|$.

1. Montrer que N_p est une norme.
2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité de $\Phi_c : f \mapsto f(c)$ définie sur E muni de la norme N_p.
3. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ distincts. Les normes N_p et N_q sont-elles équivalentes ?

Ex 83 : [Mines]

1. Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un $a \in \mathbb{R}_+$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

   Dans la suite de l'exercice on fixe un réel θ tel que $\dfrac{\theta}{\pi}$ ne soit pas rationnel.

2. Montrer que $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos(\sqrt{n}\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 84 : [Mines] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f_n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$. Montrer que la suite (x_n) converge et trouver sa limite.
3. On pose $u_n = n(x_n - 1)$ et $h : x \mapsto e^x(x-1)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} h(u_n) = 1$.
4. Montrer que $x_n = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, où α désigne la solution de l'équation $h(x) = 1$.