Correction des exercices du 07/10/20224 (Algèbre linéaire)

Ex 1 : Soit n un entier naturel donné avec $n \geq 2$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. On appelle f_n l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ f_n(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' - n(n+1)P$.

1. Soit $P \in E$. Montrer que $d^\circ(f_n(P)) = d^\circ P$ si on a $d^\circ P \leq n-1$ et $d^\circ(f_n(P)) < d^\circ P$ sinon . Puis en déduire $\operatorname{Im} f_n$ et montrer que $\operatorname{Ker} f_n$ est une droite vectorielle.

2. Soit S l'endomorphisme $P \mapsto P(-X)$.

- ***a.*** Quelle est la nature de S ? Montrer que S et f_n commutent. En déduire que $\operatorname{Ker} f_n$ est stable par S.
- ***b.*** Soit P un élément non nul de $\operatorname{Ker} f_n$. Que vaut $d^\circ P$? Montrer que $P(-X) = (-1)^n P$.

3. On pose $H = (X^2-1)^n$ et $L = H^{(n)}$. En observant que $(X^2-1)H' - 2nXH = 0$, montrer que L est dans $\operatorname{Ker} f_n$ et en déduire $\operatorname{Ker} f_n$.

Correction :

1. Soit $P = a_pX^p + ...$, avec $a_p \in \mathbb{R}^*$ et $p \leq n$. Si $p \geq 2$, on a :
$f_n(P) = (X^2-1)(a_pp(p-1)X^{p-2} + 2X(a_ppX^{p-1} + ...) - n(n+1)(a_pX^p + ...) =$
$a_p[p(p-1) + 2 - n(n+1)]X^p + ... = a_p[p(p+1) - n(n+1)]X^p + ...$
Cette formule reste vraie pour $p = 1$ et $p = 0$. La fonction $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est injective, ainsi : $p(p+1) = n(n+1) \Leftrightarrow p = n$.
Si $p < n$, alors $a_p[p(p+1) - n(n+1)] \neq 0$ et $d^\circ(f_n(P)) = d^\circ P = p$, sinon $d^\circ(f_n(P)) < d^\circ P$.

Grâce à ce qui précède, on a : $\forall P \in E\ d^\circ(f_n(P)) \leq n-1$, donc $\operatorname{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\dim(\operatorname{Im}(f_n)) \leq n$. Par ailleurs grâce à ce qui précède $(f_n(1), f_n(X), ..., f_n(X^{n-1}))$ est une famille de $\operatorname{Im}(f_n)$ de degré échelonné (les degrés sont $0, 1, ..., n-1$), donc libre. Comme elle posède n éléments, alors $n \leq \dim(\operatorname{Im}(f_n))$ et donc $n = \dim(\operatorname{Im}(f_n))$ et l'inclusion $\operatorname{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ permet d'affirmer que

$$\boxed{\operatorname{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

Grâce au théorème du rang : $\dim(\operatorname{Ker}(f_n)) = \dim(\mathbb{C}_n[X]) - \dim(\operatorname{Im}(f_n)) = n+1-n = 1$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f_n)$ est une droite vectorielle.

2. ***a.*** On constate que $S \circ S = Id$, donc S est une symétrie vectorielle.
Soit $P \in E$. On pose $Q = S(P) = P(-X)$. On a :
$f_n(S(P)) = f_n(Q) = (X^2-1)Q'' + 2XQ' - n(n+1)Q =$
$(X^2-1)(-1)^2P''(-X) - 2XP'(-X) - n(n+1)P(-X) =$
$((-X)^2-1)P''(-X) + 2(-X)P'(-X) - n(n+1)P(-X) = f_n(P)(-X) = S(f_n(P))$.

$$\boxed{f_n \circ S = S \circ f_n}$$

Grâce au cours : $\operatorname{Ker} f_n$ est stable par S.

b. On a $f_n(P) = 0$, donc $d^\circ(f_n(P)) = -\infty < d^\circ(P)$, donc grâce à la première question,

$$\boxed{d^\circ P = n}$$

Grâce à la question précédente, $S(P) = P(-X)$ est aussi dans $\operatorname{Ker}(f_n)$. Comme $\operatorname{Ker}(f_n)$ est une droite vectorielle et que P est non nul, alors $\operatorname{Ker}(f_n) = vect(P)$ et donc $P(-X)$ est dans $vect(P)$ et il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(-X) = \lambda P(X)$. En regardant les coefficients dominants, on a : $P(X) = a_nX^n + ...$ et donc $a_n(-X)^n = \lambda a_nX^n$, puis comme a_n est non nul, $\lambda = (-1)^n$.

$$\boxed{P(-X)=(-1)^nP}$$

3. On a : $(X^2-1)H'-2nXH=(X^2-1)(2nX(X^2-1)^{n-1})-2nX(X^2-1)^n=0$. En dérivant $n+1$ fois la relation $(X^2-1)H'-2nXH=0$, on a grâce à la formule de Leibniz :
$0=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(X^2-1)^{(k)}H^{(n+2-k)}-2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}X^{(k)}H^{(n+1-k)}=$
$\binom{n+1}{0}(X^2-1)H^{(n+2)}+\binom{n+1}{1}2XH^{(n+1)}+\binom{n+1}{2}2H^{(n)}-2n\binom{n+1}{0}XH^{(n+1)}-2n\binom{n+1}{1}H^{(n)}=$
$(X^2-1)L''+2X(n+1)L'+n(n+1)L-2nXL'-2n(n+1)L=(X^2-1)L''+2XL'-n(n+1)L=f_n(L)$.
Comme L est bien non nul et de degré n, alors comme $\mathrm{Ker}\,(f_n)$ est une droite vectorielle, alors

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f_n)=vect(L)}$$

<u>Ex 2</u> : Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(1)=0\}$ et f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$, par
$f:P\mapsto(X-1)\big(P'(X)-P'(1)\big)-2\big(P(X)-P(1)\big)$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa dimension.
2. Déterminer $A\cap\mathrm{Vect}(1,(X-1)^k)$, pour $k\in[\![1,n]\!]$.
3. Donner une base de A.
4. Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction :

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Fait en TD.
4. La famille $(1,X-1,(X-1)^2,...,(X-1)^n)$ est libre (échelonnée en degré) et de cardinal $n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Il existe $a_0,...,a_n\in\mathbb{R}$ tel que $P=\sum_{k=0}^{n}a_k(X-1)^k$.

   On suppose que $n\geq 3$.

   On a : $f(P)=(X-1)\big(\sum_{k=1}^{n}ka_k(X-1)^{k-1}-a_1\big)-2\big(\sum_{k=0}^{n}a_k(X-1)^k-a_0\big)=$
   $(X-1)(\sum_{k=2}^{n}ka_k(X-1)^{k-1})-2(\sum_{k=1}^{n}a_k(X-1)^k)=\sum_{k=2}^{n}ka_k(X-1)^k-2\sum_{k=1}^{n}a_k(X-1)^k=$
   $\sum_{k=2}^{n}(k-2)a_k(X-1)^k-2a_1(X-1)=\sum_{k=3}^{n}(k-2)a_k(X-1)^k-2a_1(X-1)$.
   Comme $(1,X-1,(X-1)^2,...,(X-1)^n)$ est libre, alors $f(P)=0$ si et seulement si $a_1=0$ et $\forall k\in[\![3,n]\!],\ (k-2)a_k=0$, ce qui équivaut à $a_1=a_3=a_4=...=a_n=0$.
   Ainsi $\mathrm{Ker}\,(f)=vect(1,(X-1)^2)$, qui est de dimension 2. Ainsi grâce au théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=n+1-2=n-1$.
   Grâce au calcul précédent, on constate que $\mathrm{Im}\,(f)\subset vect(X-1,(X-1)^3,...,(X-1)^n)$ et comme $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=n+1=\dim(vect(X-1,(X-1)^3,...,(X-1)^n))$, alors on a :
   $\mathrm{Im}\,(f)=vect(X-1,(X-1)^3,...,(X-1)^n)$.

   Pour $n=2$, on a pour $P=a_0+a_1(X-1)+a_2(X-2)^2$: $f(P)=-2a_1(X-1)$, donc ici $\mathrm{Ker}\,(f)=vect(1,(X-1)^2)$ et $\mathrm{Im}\,(f)=vect(X-1))$.

   Pour $n=1$, on a pour $P=a_0+a_1(X-1)$: $f(P)=-2a_1(X-1)$, donc ici $\mathrm{Ker}\,(f)=vect(1)$ et $\mathrm{Im}\,(f)=vect(X-1))$.