Correction des exercices du 14/10/2024 (Algèbre linéaire)

Ex 1 : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & & (0) & & n-1 \\ & 1 & & & n-2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Correction : Pour $n \geq 2$, on pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & & (0) & & n-1 \\ & 1 & & & n-2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ qui est un déterminant de taille $n \times n$. En développant par rapport à la première ligne, on a pour $n \geq 3$:

$\Delta_n = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & & (0) & & n-2 \\ & 1 & & & n-3 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & 1 & 1 \\ n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$

$\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. En développant $\begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ par rapport à la première colonne, on a (ce déterminant est de taille $(n-1) \times (n-1)$) :

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)+1}(n-1) \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n(n-1)$.

Ainsi $\Delta_n = \Delta_{n-1} + (-1)^{2n+1}(n-1)^2 = \Delta_{n-1} - (n-1)^2$. On a donc :

$\Delta_n = \Delta_{n-1} - (n-1)^2 = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} - (n-2)^2 - (n-1)^2 = ... = \Delta_2 - \sum_{k=2}^{n-1} k^2 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 1 =$

$-\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 1$. En validant cette formule par récurrence, on a :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \Delta_n = -\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 1}$$

Ex 2 : Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1. Quel est le polynôme minimal de $3I_n + J$?

Correction : On pose $M = 3I_n + J$. On a en posant le calcul matriciel : $J^2 = nJ$, puis $(M - 3I_n)^2 = n(M - 3I_n)$, puis $M^2 - 6M + 9I_n = nM - 3nI_n$ soit $M^2 - (6+n)M + (9+3n)I_n = 0$. Ainsi $P = X^2 - (6+n)X + 3(3+n) = (X-3)(X-3-n)$ annule M. On a donc $\mu_M | (X-3)(X-3-n)$. On peut donc avoir $\mu_M = X - 3$, ou $\mu_M = X - 3 - n$ ou $\mu_M = (X-3)(X-3-n)$. Si $\mu_M = X - 3$, alors $0 = \mu_M(M) = M - 3I_n = J \neq 0$ ce qui est impossible. De même on ne peut avoir $\mu_M = X - 3 - n$. On a donc $\mu_M = (X-3)(X-3-n)$.

Ex 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(f^2 id_E) \neq \{0\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$ et $\mathrm{Im}\,(f^2 + id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.
3. Donner l'expression de p la projection sur $\mathrm{Ker}\,(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$.
4. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$, $x \neq 0$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.
5. Quelles sont les dimensions de $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{Id})$ et de $\mathrm{Ker}\, f$.
6. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Montrer que $\left\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3),\ f \circ g = g \circ f\right\} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}, f, f^2)$.
8. Résoudre $u^2 = f$.

Correction :

Ex 4 :

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Fait en TD.
4. Fait en TD.
5. Grâce à la première question, on a : $\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E) \neq \{0\}$, donc il existe x non nul dans $\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$. Ainsi $(x, f(x))$ est libre grâce à la question précédente. Comme f et $f^2 + id_E$ commutent, alors f laisse stable $\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$ et donc $(x, f(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$. Ainsi on a : $\dim(\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)) \geq 2$.
   Si $\dim(\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)) = 3$, alors grâce à la première question, on a $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$. Comme f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, alors f est bijective. Ainsi comme $f^3 + f = 0$, alors $f^2 + Id_E = 0$, puis $f^2 = -Id_E$. On a donc $\det(f^2) = \det(-Id_E)$, soit $0 \geq (\det(f))^2 = -1$, ce qui est absurde. Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)) = 2$, puis $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$.
6. Soit $e_1 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $e_2 \in \mathrm{Ker}\,(f^2 + Id_E)$ non nuls. On pose $e_3 = f(e_2)$. Comme (e_2, e_3) est libre dans $\mathrm{Ker}\,(f^2 + Id_E)$, alors grâce à la question précédente (e_2, e_3) est une base de $\mathrm{Ker}\,(f^2 + Id_E)$. Par ailleurs (e_1) est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$. Par conséquent $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$. Comme $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$, car e_2 est dans $\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$, alors on a : $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $f \circ g = g \circ f$. Par ailleurs g et $f^2 + id_E$ commutent, donc g laisse stable $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f^2 + id_E)$.
   Ainsi il existe $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $Z = Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
   On a donc : $Mat_{\mathcal{B}}(g) Mat_{\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}}(g)$, soit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \end{pmatrix}$.
   On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a donc : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, soit
   $\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & c \end{pmatrix}$, soit $b = -c$ et $a = d$. On a donc $Z = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & a & -c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$.

On pose $Y = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On a donc $Z = xI_3 + cY + (a+x)Y^2$, puis $g = xid_E + cf + (a+x)f^2$, donc : $g \in \text{Vect}\,(\text{Id}, f, f^2)$.
Réciproquement id, f et f^2 commutent avec f, donc : $\text{Vect}\,(\text{Id}, f, f^2) \subset \left\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), f \circ g = g \circ f\right\}$, d'où : $\left\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3),\ f \circ g = g \circ f\right\} = \text{Vect}\,(\text{Id}, f, f^2)$.

8. Soit u une solution. On a alors $uf = f^3 = fu$. Grâce à la question précédente, il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $u = xId_E + yf + zf^2$. On a (avec $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$ et tout commute) :
$u^2 = x^2 id_E + y^2 f^2 + z^2 f^4 + 2xyf + 2xzf^2 + 2yzf^3 = x^2 id_E + (y^2 - z^2 + 2xz)f^2 + (2xy - 2yz)f$.
(id_E, f, f^2) est libre , car matriciellement, si $0 = aid_E + bf + cf^2$, alors $0 = aI_3 + bY + cY^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-c & -b \\ 0 & b & a-c \end{pmatrix}$ puis $a = b = c = 0$. On a $u^2 = f$, donc $x^2 = 0$, $y^2 - z^2 + 2xz = 0$, $2xy - 2yz = 1$. Cela donnne $x = 0$, $y^2 = z^2$ et $yz = -1/2$. Ainsi y et z sont de signe contraire, donc $y = -z$, puis $z^2 = 1/2$, donc (y, z) vaut $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ou $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. On a donc $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f - f^2\right)$ ou $u = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f - f^2\right)$.
Réciproquement, on vérifie que ces deux solutions vérifient bien le probème.