

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

## Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

$\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

### Éléments propres et polynôme caractéristique

- Droite stable, valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme ;
- Si  $u$  et  $v$  commutent, alors  $v$  laisse stable les sous-espaces propres de  $u$  ;
- Les sous-espaces propres sont en somme directe ;
- Polynôme caractéristique  $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ ,  $\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ , les valeurs propres sont les racine du polynôme caractéristique, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres si le polynôme caractéristique est scindé ;
- Transposition au cas des endomorphisme ;
- Théorème de Cayley-Hamilton (admis) ;
- Multiplicité d'une valeur propre,  $\forall \lambda \in Sp(A)$ ,  $\dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda$  ;
- Majoration du nombre des valeurs propres comptées avec multiplicité ;
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

### Diagonalisation en dimension finie

- Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable, exemple des projecteurs et des symétries ;
- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$  et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité si et seulement si  $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E)$  ;
- Transposition des propriétés précédentes aux matrices ;
- Un endomorphisme ou matrice admettant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable ;
- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
- Lien entre diagonalisation et polynôme annulateur ou minimal scindé à racines simples.
- Si  $u$  est diagonnalisable, tout endomorphisme induit l'est.
- Théorème spectral (admis pour le moment).

## À SAVOIR MONTRER

- CCINP 65
- CCINP 69
- CCINP 70
- CCINP 88
- CCINP 91