

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

## Révisions de sup sur les polynômes

- Racine carrée d'un nombre complexe, équation du second degré ;
- Racines  $n$ -ème de l'unité et d'un nombre complexe, somme des racines  $n$ -ème de l'unité ;
- Racines multiples, caractérisation par la divisibilité et la dérivée ;
- Polynômes scindés, relations coefficients/racines, d'Alembert-Gauss, tout polynôme de  $\mathbb{C}$  est scindé ;
- Factorisation à l'aide des racines, majoration du nombre de racines, polynômes irréductibles, factorisation dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

## Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

$\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

### Éléments propres et polynôme caractéristique

- Droite stable, valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme ;
- Si  $u$  et  $v$  commutent, alors  $v$  laisse stable les sous-espaces propres de  $u$  ;
- Les sous-espaces propres sont en somme directe ;
- Polynôme caractéristique  $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ ,  $\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ , les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres si le polynôme caractéristique est scindé ;
- Transposition au cas des endomorphisme ;
- Théorème de Cayley-Hamilton (admis) ;
- Multiplicité d'une valeur propre,  $\forall \lambda \in Sp(A)$ ,  $\dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda$  ;
- Majoration du nombre des valeurs propres comptées avec multiplicité ;
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

### Diagonalisation en dimension finie

- Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable, exemple des projecteurs et des symétries ;
- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$  et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité si et seulement si  $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E)$  ;
- Transposition des propriétés précédentes aux matrices ;
- Un endomorphisme ou matrice admettant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable ;
- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
- Lien entre diagonalisation et polynôme annulateur ou minimal scindé à racines simples.
- Si  $u$  est diagonnalisable, tout endomorphisme induit l'est.
- Théorème spectral (admis pour le moment).

### Trigonalisation

- Endomorphisme et matrice trigonalisable ;

- Un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique ou minimal est scindé sur  $\mathbb{K}$  si et seulement on peut trouver un polynôme annulateur scindé sur  $\mathbb{K}$  (aucune technique générale de trigonalisation est au programme, une trigonalisation doit être guidée) ;
- Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable tout comme tout endomorphisme d'une  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- Une matrice ou un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

## Sous-espaces caractéristiques

- Définition ; somme directe des sous-espaces caractéristiques, dimension des sous-espaces caractéristiques ;
- Si le polynôme minimal  $\mu_u$  de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors il existe des sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$  de  $E$ , stables par  $u$ , tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ , tels que si on note  $u_i$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_i$ , alors  $u_i = \lambda_i Id_{E_i} + n_i$ , avec  $n_i$  un endomorphisme nilpotent de  $E_i$  et  $\lambda_i$  dans  $\mathbb{K}$ .
- Si le polynôme minimal  $\mu_A$  de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors  $A$  est semblable à une matrice de la forme
 
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p I_{n_p} + N_p \end{pmatrix},$$
 avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  dans  $\mathbb{K}$  et  $N_1, \dots, N_p$  des matrices nilpotentes.

## À SAVOIR MONTRER

- CCINP 34
- CCINP 37
- CCINP 61
- CCINP 84
- CCINP 85