Correction des exercices du 4/11/2024 (Révisions fonctions et réduction)

Ex 1 : Pour $x, y, a, b > 0$, montrer que : $x \ln \dfrac{x}{a} + y \ln \dfrac{y}{b} \geq (x+y) \ln \dfrac{x+y}{a+b}$.

Correction : La fonction $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $\dfrac{x}{x+y}, \dfrac{y}{x+y}$ sont positifs avec : $\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x+y} = 1$, donc :

$$-\ln\left(\frac{x}{x+y}\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{y}{x+y}\left(\frac{b}{y}\right)\right) \leq -\frac{x}{x+y}\ln\frac{a}{x} - \frac{y}{x+y}\ln\frac{b}{y}$$

ce qui s'écrit aussi

$$-\ln\left(\frac{a+b}{x+y}\right) \leq -\frac{x}{x+y}\ln\frac{a}{x} - \frac{y}{x+y}\ln\frac{b}{y},$$

soit

$$\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leq \frac{x}{x+y}\ln\frac{x}{a} + \frac{y}{x+y}\ln\frac{y}{b},$$

ce qui donne le résultat en multipliant par $x + y > 0$.

Ex 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Diagonaliser A (donner $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$).

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La matrice $\alpha A + \beta I_3$ est-elle diagonalisable ? Inversible ?

3. ***a.*** Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $X^2 = A$. Montrer que $AX = XA$

b. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $X^2 = A$ et $X^2 + X = A$. Même question dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Correction :

1. On a en développant par rapport à la deuxième ligne :
$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -2 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 1 & 0 & X+2 \end{vmatrix} = (X-1) \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ 1 & X+2 \end{vmatrix} = (X-1)\left[(X-1)(X+2)+2\right] = (X-1)\left(X^2+X\right) = X(X-1)(X+1)$.
A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.
De plus comme les valeurs propres sont deux à deux distinctes, alors les multiplicités et les dimensions des sou-espaces propres valent un.

<u>$E_1(A)$:</u> On remarque que $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme $\dim(E_1(A)) = 1$, alors $E_1(A) = vect\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>$E_0(A) = \mathrm{Ker}\,(A)$:</u> On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+2z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ -x-2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+2z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2z \\ y-z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2z \\ y & = & z \end{array}\right. .$$

On a donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = vect\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\underline{E_{-1}(A) :}$ On a $E_{-1}(A) = \operatorname{Ker}(-I_3 - A) = \operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + 2z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \\ -x - z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x + z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -z \\ y & = & 0 \end{array} \right. .$$

On a donc $E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} = vect \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si on note $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a : $A = PDP^{-1}$.

2. On a : $\alpha A + \beta I_3 = \alpha PDP^{-1} + \beta PI_3P^{-1} = P(\alpha D + \beta I_3)P^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha + \beta \end{pmatrix} P^{-1}$,

par conséquent $\alpha A + \beta I_3$ est diagonalisable.

Comme deux matrices semblables ont le même déterminant, alors :

$\det(\alpha A + \beta I_3) = \det \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha + \beta \end{pmatrix} = (\alpha + \beta)\beta(-\alpha + \beta)$, puis $\alpha A + \beta I_3$ est inversible si

et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \beta \neq 0 \\ \alpha \neq \beta \\ \alpha \neq -\beta \end{array} \right.$.

3. ***a.*** On a : $AX = X^3 = XA$

b. Pour $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $Y = P^{-1}XP$ de telle sorte que l'on ait : $X = PYP^{-1}$.
On a donc $X^2 = A \Leftrightarrow PY^2P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow Y^2 = D$, car P et P^{-1} sont inversibles.
Si $X^2 = A$, on a aussi grâce à la question précédente : $YD = DY$.

Cherchons d'abord les matrices N qui commutent avec D. Soit $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. On

a : $ND = DN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & -a_{13} \\ a_{21} & 0 & -a_{23} \\ a_{31} & 0 & -a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_{12} & = & 0 \\ -a_{13} & = & a_{13} \\ a_{21} & = & 0 \\ a_{23} & = & 0 \\ a_{31} & = & -a_{31} \\ a_{32} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$, soit N est diagonale.

Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = A$, alors grâce à ce qui précède, Y est diagonale, soit $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, avec $Y^2 = D$, ce qui donne $\left\{ \begin{array}{lcl} a^2 & = & 1 \\ b^2 & = & 0 \\ c^2 & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in \{-1, 1\} \\ b = 0 \\ c \in \{-i, i\} \end{array} \right.$

Réciproquement si $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, avec a dans $\{-1, 1\}$ et c dans $\{-i, i\}$, on a bien $Y^2 = D$, ce qui donne ensuite $X^2 = A$.

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}, \ a \in \{-1, 1\}, \ c \in \{-i, i\} \right\}$.

Par la méthode du pivot de Gauss, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc on a exactement quatre solutions qui sont :

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -2i \\ 1 & 1 & 1 \\ i & 0 & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 2i \\ 1 & 1 & 1 \\ -i & 0 & -2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 & -2i \\ -1 & -1 & -1 \\ i & 0 & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 2i \\ -1 & -1 & -1 \\ -i & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Si on a une solution $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = A$, en posant $Y = P^{-1}XP$ qui est aussi dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on trouve comme avant que $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, avec $a^2 = 1; b^2 = 0$ et $c^2 = -1$.
Mais cette dernière équation est impossible dans $\mathbb{R}$, donc on n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Pour l'équation $X^2 + X = A$. Si on a une solution, on constate aussi que $AX = XA$. Ainsi si X est solution, alors Y est diagonale, avec $Y^2 + Y = D$, ce qui donne $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$,

avec $\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + a & = & 1 \\ b^2 + b & = & 0 \\ c^2 + c & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + a - 1 & = & 0 \\ b(b+1) & = & 0 \\ c^2 + c + 1 & = & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in \left\{ -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right\} \\ b \in \{0, -1\} \\ c \in \{-j, j\} \end{array} \right.$

On conclut de la même manière, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},\ a \in \left\{ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}, b \in \{0, -1\}, c \in \{-j, j\} \right\}.$$

Dans ce cas non plus il n'y a pas de solutions réelles.