Correction des exercices du 11/09/2023 (Intégration)

<u>**Ex 1**</u> : CV et calcul de : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-x^3}$.

Correction : La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-x^3}$ est continue sur $[2,+\infty[$.

<u>Problème en $+\infty$:</u> $\left|\dfrac{1}{x-x^3}\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$. Par comparaison de fonction positive, comme $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$, alors $x \mapsto \left|\dfrac{1}{x-x^3}\right|$ l'est aussi.

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-x^3} \text{ converge}}$$

On a $\dfrac{1}{X-X^3} = \dfrac{1}{X(1+X)(1-X)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{1+X} + \dfrac{c}{1-X}$.

On a $a = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x)(1-x)} = 1$, $b = \displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{1}{x(1-x)} = -1/2$ et $c = \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x(1+x)} = 1/2$.

On a donc : $\dfrac{1}{X-X^3} = \dfrac{1}{X(1+X)(1-X)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{2(1+X)} + \dfrac{1}{2(1-X)}$.

Pour $a > 2$, on obtient :

$\displaystyle\int_2^a \frac{dx}{x-x^3} = \int_2^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}\right) dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x|\right]_2^a =$
$\ln\left(\dfrac{a}{\sqrt{1+a}\sqrt{a-1}}\right) - \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(3) = \ln\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right) - \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(3)$.

Or $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}} \underset{a\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{\sqrt{a^2}} = \dfrac{a}{a} = 1$, car $a > 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \ln\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right) = \ln(1) = 0$.

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-x^3} = -\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3)}$$

<u>**Ex 2**</u> : CV de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{ch}(2t) - \text{ch}(t)}{\ln(1+t\sqrt{t})\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.

Correction : La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\text{ch}(2t) - \text{ch}(t)}{\ln(1+t\sqrt{t})\sin(t)}$ est continue sur $]0,1]$ (le sinus ne s'annule pas sur $]0,1]$, car on a : $]0,1] \subset]0,\pi/2]$).

<u>Problème en 0 :</u>

$\text{ch}(2t) - \text{ch}(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + 4t^2/2 - (1+t^2/2) + o(t^2) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{3t^2}{2} + o(t^2)$. Ainsi $\text{ch}(2t) - \text{ch}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{3t^2}{2}$.

On a aussi : $\ln(1+t\sqrt{t})\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t\sqrt{t} \times t = t^{5/2}$.

Ainsi $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{3t^2/2}{t^{5/2}} = \dfrac{3}{2t^{1/2}}$. Par comparaison de fonctions positives au voisinage de 0, comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$, alors f aussi.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\text{ch}(2t) - \text{ch}(t)}{\ln(1+t\sqrt{t})\sin(t)}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

Ex 3 : CV de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Correction : Soit $f : t \mapsto t^\alpha e^{-t^\beta}$ qui est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Premier cas : $\beta = 0$:

On a $f : t \mapsto \dfrac{e^{-1}}{t^{-\alpha}}$. L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ converge au voisinage de 0 si et seulement si $-\alpha < 1$ et converge au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $-\alpha > 1$. Il est impossible d'avoir des deux situations, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ diverge.

Deuxième cas : $\beta > 0$:

- Problème en 0 :

  On a $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^\beta = 0$, donc $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^\alpha = \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$.

  Par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$, soit $\alpha > -1$.
- Problème en $+\infty$:
  Soit $t \geq 1$. On a $t^2 f(t) = t^{\alpha+2}e^{-t^\beta} = (t^\beta)^{\frac{\alpha+2}{\beta}} e^{-t^\beta} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, car croissance comparée, car $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^{\frac{\alpha+2}{\beta}} e^{-X} = 0$. Ainsi $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

Troisième cas : $\beta < 0$:

- Problème en 0 :
  Pour $t \in]0,1]$, on a : $t^{1/2} f(t) = (t^\beta)^{\frac{\alpha+1/2}{\beta}} e^{-t^\beta} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, car croissance comparée, car $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^{\frac{\alpha+1/2}{\beta}} e^{-X} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^\beta = +\infty$. Ainsi $f(t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1/2}}\right)$, donc $\displaystyle\int_0^1 f$ converge.
- Problème en $+\infty$:
  On a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\beta = 0$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^\alpha = \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$.

  Par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $-\alpha > 1$, soit $\alpha < -1$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } (\beta > 0 \text{ et } \alpha > -1) \text{ ou } (\beta < 0 \text{ et } \alpha < -1)}$$