

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

## Espaces vectoriels normés

La relation  $\sup(kA) = k \sup(A)$  pour  $k \in \mathbb{R}_+$  peut être utilisée sans démonstration.

### Normes

- Définition, normes dérivant d'un produit scalaire.
- Normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^p$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .
- Distance associée à une norme, distance d'un point à une partie.
- Boules ouvertes, fermées, sphères, les boules sont des parties convexes (définition des parties convexes à ce moment là).
- Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.
- Produit d'espaces vectoriels normés.

### Suites d'un espace vectoriel normé

- Définition, CV, opérations sur les limites CV dans un espace produit,, suite CV implique suite bornée.
- Suites extraites et valeurs d'adhérence.

### Comparaison de normes

- Domination de normes, normes équivalentes.
- Invariance du caractère borné et de la limite d'une suite pour deux normes équivalentes.
- Équivalence des normes en dimension finie, la convergence et la valeur de la limite sont indépendants de la norme choisie en dimension finie.
- En dimension finie, la CV se ramène à celle de ses coordonnées dans une base, exemple de suites de matrices.

### Série d'un espace vectoriel normé

- Définition, reste, somme partielle.
- Le terme général d'une série CV converge vers 0, divergence grossière.
- Séries télescopique,  $(u_n)$  CV ssi  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  CV.
- Linéarité de la somme.
- Absolue convergence. En dimension finie l'absolue CV implique la CV.
- Exponentielle de matrices ou d'endomorphisme d'un ev de dimension finie,  $\exp(A + B)$  ou  $\exp(u + v)$  quand  $A$  et  $B$  commutent ou  $u$  et  $v$  commutent,  $P \exp(A) P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$  et  $Sp(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in Sp(A)\}$ .

### Topologie d'un espace vectoriel normé

- Points intérieurs, intérieur, partie ouverte, indépendance de la notion d'ouvert par rapport à la norme en dimension finie, toute boule ouverte est un ouvert.  $A$  est ouvert ssi  $\bar{A} = A$ .
- Points adhérents, adhérence, fermé, caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés, indépendance de la notion de fermé par rapport à la norme en dimension finie, toute boule fermée ou sphère est un fermé.  $A$  est fermé ssi  $\bar{A} = A$ .

- Réunion et intersection d'ouverts et de fermés.
- Voisinage, Frontière, parties denses, topologie induite sur une partie.

## Limite et continuité en un point

- Définition, caractérisation séquentielle, limite dans un espace produit, en dimension finie la limite ne dépend pas de la norme, utilisation des coordonnées polaire pour trouver une limite en  $(0, 0)$ .
- Continuité en un point, continuité.
- Limite et continuité et opérations algébriques et composition.
- En dimension finie, la limite ou la continuité d'une fonction se ramènent à celle de ses coordonnées dans une base.
- Fonctions lipschitzienne, uniformément continue et lien avec la continuité.
- Continuité de l'exponentielle de matrice ou d'endomorphismes en dimension finie.
- Fonction polynomiale à plusieurs variables et continuité, continuité du déterminant.
- Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue.

## Continuité des applications linéaires et multilinéaires

- Toute application linéaire  $f : E \rightarrow F$  avec  $E$  de dimension finie est continue, ce qui équivaut à la continuité en 0 ce qui équivaut à :  $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ .
- Norme triple ou norme subordonnée pour les applications linéaires ou les matrices, la norme triple est une norme sous-multiplicative.
- $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$  une application  $p$ -linéaire est continue ssi Il existe  $K$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  tel que :  $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq K\|x_1\|_1 \times \dots \times \|x_p\|_p$ .
- En dimension finie, les applications linéaires et multilinéaires sont continues, le produit matriciel et la composition d'applications linéaires en dimension finie sont continues.

## À SAVOIR MONTRER

- CCINP 1
- CCINP 38
- CCINP 40
- CCINP 45

- Soit  $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour  $k$  dans  $\mathbb{N}$ , on pose  $C_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 + \frac{2}{k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n + \frac{n}{k} \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que pour  $k$  suffisamment grand, les coefficients diagonaux de  $C_k$  sont deux à deux distincts.
2. En déduire que  $C$  est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.
3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .