Semaine 10 : du 2 au 6 décembre

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Topologie

Parties compactes

- Définition.
- Une suite d'un compact CV ssi elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.
- Compact implique fermé et borné, un fermé d'un compact est compact.
- Un produit cartésien fini de compacts est compact.
- L'image d'un compact par une application continue est compact, théorème de la borne atteinte, théorème de Heine.
- En dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.
- En dimension finie, toute suite borné admet une sous-suite convergente et elle converge ssi elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.
- Tout sous-ev F de dimension finie de E est fermé dans E.

Parties connexes par arcs

- Définition d'un chemin. Être relié par un chemin est une relation d'équivalence.
- Partie connexe par arcs, composantes connexes par arcs.
- Une partie étoilé ou convexe est connexe par arcs.
- Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$.
- Image d'une partie connexe par arcs par une application continue, TVI.

Suites de fonctions

(f_n) est une suite de fonctions définie sur une partie A d'un EVN à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Convergence simple (CVS), convergence uniforme (CVU), la CVU implique la CVS.
- Continuité et limite d'une suite de fonctions qui CVU, adaptation sur tout voisinage de A ou sur segment inclus dans I, si $A = I$, un intervalle de $\mathbb{R}$. Théorème de la double limite.
- Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier. Théorème d'approximation uniforme de Weierstrass.
- Théorème de convergence dominé ; si (f_n) CVU sur le segment $[a, b]$ vers f, alors $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$; primitivation d'une suite de fonction CVU.
- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement vers f sur I telle que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h sur I. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f' = h$., adaptation au cas où (f_n') CVU sur tout segment de I, extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$.

À SAVOIR MONTRER

- CCINP 9
- CCINP 13
- CCINP 25
- CCINP 36
- CCINP 48