Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Suites et séries de fonctions

(f_n) est une suite de fonctions définie sur une partie A d'un EVN à valeurs dans un evn.

Suites de fonctions

Suites de fonctions

- Convergence simple (CVS), convergence uniforme (CVU), la CVU implique la CVS.
- Continuité et limite d'une suite de fonctions qui CVU, adaptation sur tout voisinage de A ou sur segment inclus dans I, si $A = I$, un intervalle de $\mathbb{R}$. Théorème de la double limite.
- Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier. Théorème d'approximation uniforme de Weierstrass.
- Théorème de convergence dominé ; si (f_n) CVU sur le segment $[a, b]$ vers f, alors $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$; primitivation d'une suite de fonction CVU.
- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement vers f sur I telle que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h sur I. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f' = h$., adaptation au cas où (f'_n) CVU sur tout segment de I, extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Série de fonctions

- CVS, CVU, convergence normale (CVN). La CVN implique la CVU qui implique la CVS.
- Utilisation de la CVU ou de la CVN pour montrer la continuité d'une série de fonctions, adaptation à tout segment inclus dans I ou tout voisinage de A.Théroème de la double limite, continuité de exp sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{L}(E)$.
- Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I, la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I), alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ et extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
- Intégration terme à terme cas positif : pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I, $\sum f_n$ converge simplement vers S qui est continue par morceaux sur I, alors dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: $\int_I (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t))dt = \int_I S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$
  Intégration terme à terme : pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I, $\sum f_n$ converge simplement vers S qui est continue par morceaux sur I,$\sum \int_I |f_n(t)|dt$ converge, alors $\sum \int_I f_n(t)dt$ converge, S est intégrable sur I et $\int_I (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t))dt = \int_I S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$
  Intégration terme à terme sur un segment lorsque l'on a la CVU sur ce segment ; primitivation d'une série de fonctions CVU.
- Compléments ; recherche de limites et d'équivalents par encadrement à l'aide par exemple d'une comparaison série/intégrale.

À SAVOIR MONTRER

- CCINP 8
- CCINP 12

- CCINP 16
- CCINP 53
- Pour x dans $]1,+\infty[$, on pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.