

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

## Séries entières

### Rayon de convergence

- Lemme d'Abel.
- Le rayon de convergence est la borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$  de l'ensemble des réels positifs  $r$  tels que la suite  $(a_n r^n)$  est bornée ; le rayon de convergence est la borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$  de l'ensemble des réels positifs  $r$  tels que la série  $\sum a_n r^n$  converge (ou converge absolument) ;
- Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence.
- Fonctions décomposables en série entière.
- Rayon de convergence et opérations sur les séries entières : somme, produit (produit de Cauchy),  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence (tout comme  $\sum a_n z^n$  et  $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ).
- Méthodes de détermination d'un rayon de convergence dans l'ordre :
  - Règle de D'Alembert ;
  - Si  $a_n = O_{+\infty}(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$  et si  $a_n \sim_{+\infty} b_n$  alors  $R_a = R_b$  ;
  - Utilisation d'inégalités à l'aide de la définition avec la borne supérieure.

### Régularité de la somme

- CVN d'une série entière ; continuité sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Continuité sur le disque ouvert de convergence.
- Théorème d'Abel radial.
- Dérivations des séries entières (la primitivation des séries entières n'est plus au programme, donc il faut la justifier).
- Caractère  $\mathcal{C}^\infty$  des séries entières ; expression des coefficients à l'aide des dérivées successives de la somme, unicité du DSE.
- Série de Taylor d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  et condition sur le reste intégrale pour qu'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  soit DSE.

### DSE des fonctions usuelles

- Ils ont tous été prouvés :  $\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \operatorname{Arctan}, x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto -\ln(1-x), x \mapsto (1+x)^\alpha$ .
- Sur  $\mathbb{C}$ , DSE de  $\exp$  et  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  sur le disque unité ouvert.
- Méthode pour décomposer une fonction en série entière (dans l'ordre) : opérations (somme et produit), changement de variable, dérivation, intégration, équation différentielle et formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale.
- Méthodes pour reconnaître un DSE : opérations (somme et produit), changement de variable, dérivation, intégration.

## À SAVOIR MONTRER

- CCINP 19
- CCINP 20
- CCINP 21
- CCINP 24
- CCINP 49
- CCINP 51