Sauf mention contraire, tout est à savoir.

# Espaces probabilisés

## Révisions de sup sur le dénombrement

- Cardinal, injections/ surjections/ bijections entre ensembles finis, ensembles finis et inclusion.
- Opérations sur les ensembles finis et cardinal : $card(\overline{A})$, $card(E \cup B)$, $card(E \times F)$, $card(\mathcal{F}(E, F))$, $card(\mathcal{P}(E))$.
- Cardinal et interprétation des $p$-listes, arrangements (pas vraiment au programme, mais le nombre d'injections entre ensembles finis l'est...), permutations et combinaisons.
- Symétie des coefficients binomiaux, triangle de Pascal, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ et complément : formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

## Dénombrabilité

Ne pas trop insister sur ce paragraphe.

- Définition, exemple de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, produit cartésien d'ensemble dénombrables.
- Réunion finie ou dénombrable d'ensemble au plus dénombrables, produit cartésien d'ensembles dénombrables. Application : $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
- Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable.

## Vocabulaire sur les ensembles

- Unions, intersections quelconques et opérations.
- Lien entre vocabulaire des essembles et celui des probabilités : issues, événements, systèmes complets d'événements...

## Espaces probabilisés

- Tribu, stabilité des tribus par opérations.
- Probabilités, probabilités et opérations ensemblistes, probabilité d'une union croissante et d'une intersection décroissantes (et $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$), sous-additivité.
- Si $\Omega$ est fini ou dénombrable, une probabilité $P$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'identifie à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable et de somme 1, via la formule : $\forall\omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = p_\omega$.
- Révisions de sup : probabilité sur un univers fini, equiprobabilité, nombre de succès lors de $n$ expériences indépendantes succès-échec.
- On admet l'existence d'une tribu et d'une probabilité sur l'espace modélisant une succession infinie d'épreuves aléatoires indépendantes.
- Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formules des probabilités totales, formule de Bayes.
- Indépendance, indépendance mutuelle.
- Compléments (HP) : Borel Cantelli 1 et 2 et interprétation, démonstration probabiliste de la formule d'Euler : $\frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$.

## À SAVOIR MONTRER

- CCINP 95
- CCINP 104
- CCINP 105
- CCINP 107
- CCINP 109
- CCINP 112