Correction des exercices du 12/11/2024 (Topologie)

Si $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\ i\in[\![1,n]\!]\right\}$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda\in Sp(A)\}$.

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme.

2. Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X=(x_1,...,x_n)^T$ un vecteur propre associé. Montrer que $|\lambda||x_i|\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|$ pour tout i. En déduire que $\rho(A)\leq\|A\|$.

3. Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\|AB\|\leq\|A\|\times\|B\|$.

4. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $\lim_{k\to+\infty}A^k=0$ si et seulement si $\rho(A)<1$.

Correction :

1. Soit $A=[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Positivité : Comme : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\geq 0$, alors $\|A\|\geq 0$.
- Séparation : On suppose que $\|A\|=0$. Alors : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ 0\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leq\|A\|=0$, puis $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=0$, puis $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ |a_{ij}|=0$ et donc $A=0$.
- Homogénéité : Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. On a :
  $\|\lambda A\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|\lambda a_{ij}|,\ i\in[\![1,n]\!]\right\} =$
  $\max\left\{\underbrace{|\lambda|}_{\geq 0}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\ i\in[\![1,n]\!]\right\} = |\lambda|\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\ i\in[\![1,n]\!]\right\} = |\lambda|\|A\|$.
- Inégalité triangulaire : Soit $B=[b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, on a :
  $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|\leq\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|)=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\leq\|A\|+\|B\|$. Ainsi la constante $\|A\|+\|B\|$ majore $\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|,\ i\in[\![1,n]\!]\right\}$, donc :
  $\|A+B\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|,\ i\in[\![1,n]\!]\right\}\leq\|A\|+\|B\|$.

2. On a $AX = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \lambda X$ et donc pour $i\in[\![1,n]\!]$, on a $\lambda x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$, puis

$|\lambda||x_i| = |\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j|\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|$.

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$, ainsi on a : $|\lambda||x_{i_0}| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}||x_j| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}||x_{i_0}|$.

Comme X est non nul, alors $|x_{i_0}| > 0$ (sinon : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |x_i| = 0$), alors : $|\lambda| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| \leq \|A\|$.

3. On pose $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = [b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$. Soit $AB = [c_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a :
$\sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}| \leq \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|.|b_{kj}| = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ik}|.|b_{kj}| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}| \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{kj}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|.\|B\| \leq \|A\|.\|B\|$. Ainsi $\|A\|.\|B\|$ majore $\left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|,\ i \in [\![1,n]\!] \right\}$, donc $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$.

4. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$.

On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$. On a :$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$ et donc :
$\forall k \in \mathbb{N},\ \rho(A^k) = (\rho(A))^k$.
La deuxième question donne : $\forall k \in \mathbb{N},\ \rho(A^k) \leq \|A^k\|$ et donc : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq (\rho(A))^k \leq \|A^k\|$.
Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\| = 0$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} (\rho(A))^k = 0$ et donc $\rho(A) < 1$.
On suppose que $\rho(A) < 1$.

Pour les 3/2 : si on note $P = [p_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ et $P^{-1} = [p'_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$, alors pour k dans $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \left[\sum\limits_{l=1}^{n} p_{il}\lambda_l^k p'_{lj} \right]_{1\leq i,j\leq n}$ et donc comme : $\forall l \in [\![1,n]\!],\ |\lambda_l| \leq \rho(A) < 1$, alors :
$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{l=1}^{n} p_{il}\lambda_l^k p'_{lj} = 0$, donc tous les coefficients de A^k convergent vers 0 et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\| = 0$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Pour les 5/2 : L'application $f : M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc elle est continue. On note $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k = 0$, car : $\forall l \in [\![1,n]\!],\ |\lambda_l| \leq \rho(A) < 1$. Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = f(D^k)$, alors par continuité de f, on a : $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = \lim\limits_{k\to+\infty} f(D^k) = f(0) = 0$.