Correction des exercices du 18/11/2024 (Toplogie)

<u>Ex 1</u> : ***1.*** Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$. Montrer que : $\forall M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ \|M\| \geqslant 1$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer $\exp\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Correction :
1. Soit $f : \left\{\begin{array}{lcl} GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}\right.$. f est un morphisme de groupes et donc $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
De plus $f = \det$ est continue (car elle est polynomiale en les coefficients de M), et $\{1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, alors $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que $\|M\| < 1$. On montre par récurrence que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|M^k\| \leq (\|M\|)^k$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty}(\|M\|)^k = 0$, puis $\lim\limits_{k\to+\infty}\|M^k\| = 0$, puis $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = 0$. Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, alors M^k est dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, pour tout k de $\mathbb{N}^*$. Ainsi 0 est dans $\overline{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$ et donc dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, car cet ensemble est fermé, ce qui est impossible, car $\det(0) \neq 1$. On a donc $\|M\| \geq 1$.
3. On a : $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$. Comme $I_2N = NI_2$, alors $\exp\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(I_2)\exp(N) = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^1 \end{pmatrix}(I_2 + N) = eI_2(I_2 + N) = e\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Ex 2</u> : Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant deux racines réelles distinctes est un ouvert de $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction : $P = aX^2 + bX + c$ a deux racines réelles distinctes si et seulement si il est de degré deux et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
On pose $\psi : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ aX^2 + bX + c & \mapsto & (a, b^2 - 4ac) \end{array}\right.$ qui est continue car $(a, b, c) \mapsto a$ et $(a, b, c) \mapsto b^2 - 4ac$ sont polynomiale. Comme $\mathcal{P} = \psi^{-1}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*)$ et que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit d'ouverts, alors $\mathcal{P}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_2[X]$.

<u>Ex 3</u> : La fonction f est-elle continue sur son ensemble de définition, avec $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$?

Correction : On a : $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(0,t) = t^2$. Ainsi $\lim\limits_{t\to0} f(0,t) = 0 \neq 1 = f(0,0)$, donc f n'est pas continue en $(0,0)$.