Correction des exercices du 25/11/2024 (Suites et séries de fonctions)

Ex 1 : Déterminer la limite de l'intégrale suivante quand n tend vers $+\infty$: $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^n}$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : t \mapsto \frac{1}{e^t + t^n}$ définie sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

- (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{e^t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{e+1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$ qui est continue par morceaux

sur $[0, +\infty[$.

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, +\infty[$. On a : $|f_n(t)| \leq \frac{1}{e^t} = e^{-t} = \varphi(t)$. La fonction φ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Grâce au théorème de convergence dominé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}.$$

Ex 2 : Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) et préciser la limite éventuelle, avec $f_n : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{1 + nx^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + nx^2}$ et par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1$.

Ainsi (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue. Si on a convergence uniforme, alors f serait continue, ce qui n'est pas le cas, donc on n'a pas de convergence uniforme.

Fin de la correction des exercices de TD

Ex 3 : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. En précisant une norme sur $\mathcal{L}(E)$, montrer que l'ensemble des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Correction : On munit E d'une norme, par exemple si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E on prend

$\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (la norme 1). On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée à cette norme.

L'application : $\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ (f, g) & \mapsto f \circ g \end{cases}$ est continue, car E est de dimension finie, puis

$\psi : f \mapsto \phi(f, f) - f$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$ par opérations/compositions. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de E . Ainsi on a $\mathcal{P} = \psi^{-1}(\{0_{\mathcal{L}(E)}\})$. Comme le singleton $\{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\mathcal{P}$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

Ex 4 : Étude de la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch}(xy) - \cos(xy)}{x^2 y^2} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$.

Correction : Soit $g : t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(t) - 1}{t}$ et $g : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t}$. Ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et

elles se prolongent par continuité en 0 en posant $g(0) = h(0) = 0$, car $\frac{\operatorname{ch}(t) - 1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t} = \frac{t}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et

$\frac{\cos(t) - 1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t} = \frac{t}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Ainsi on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = h(xy) + g(xy)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$ par opérations/compositions.