

1.

$$\begin{cases} \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, y'(x) = 1 + y^2(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \operatorname{Arctan}(y(x)) = x + C \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \operatorname{Arctan}(y(x)) = x + C \\ \operatorname{Arctan}(y(0)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \operatorname{Arctan}(y(x)) = x \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, y(x) = \tan(x)},$$

car $\operatorname{Arctan}(y(x))$ et x sont dans $]-\pi/2, \pi/2[$, là où \tan réalise une bijection sur son image.

2. On part de $f' = 1 + f^2$. Nous dérivons n fois cette relation (la constante 1 disparaît, car $n \geq 1$) et on utilise la formule de Leibniz :

$$f^{(n+1)} = (f \times f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} f^{(n-k)}.$$

On a donc : $\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n+1)!} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$. Ainsi on a :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0, \pi/2[, f^{(n)}(x) \geq 0$.

Nous allons raisonner par récurrence forte.

- On a $f^{(0)} = \tan \geq 0$ sur $[0, \pi/2[$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$.

Comme $f' = 1 + f^2 \geq 0$, alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Si $n \geq 1$, on peut utiliser la relation de la question précédente qui nous donne :

$f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$. Grâce à $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$, on a pour tout k de $[[0, n]$, on a :

$f^{(k)} f^{(n-k)} \geq 0$ sur $[0, \pi/2[$ et donc : $f^{(n+1)} \geq 0$ sur $[0, \pi/2[$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi/2[, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \geq 0}$$

Soit $x \in [0, \pi/2[$. Comme la fonction \tan est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, x]$, donc grâce à la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale, pour tout n de \mathbb{N} , on a :

$$f(x) = \tan(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme on a : $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \geq 0$, grâce au point précédent, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq f(x).$$

Ainsi la série $\sum a_k x^k$ qui est à termes positifs a ses sommes partielles majorées (par $f(x)$), donc la série $\sum a_k x^k$ converge pour tout x dans $[0, \pi/2[$.

Le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vaut au moins $\pi/2$

4. Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie sur $] - \pi/2, \pi/2[$, grâce à la question précédente.

Montrons que : $g' = 1 + g^2$ sur $] - \pi/2, \pi/2[$.

Soient $x \in] - \pi/2, \pi/2[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Or par dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle de convergence, on a :

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n,$$

grâce à la question 2.

On pose $w_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$, pour n dans \mathbb{N} .

$$\text{On a donc : } g'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n - a_0^2 = a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - a_0^2.$$

Par produit de Cauchy (on est dans l'intervalle de convergence des diverses séries entières

$$\text{considérées) : } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = g^2(x).$$

Comme $a_1 = \tan'(0) = 1$ et $a_0 = \tan(0) = 0$, alors : Ainsi : $g'(x) = g^2(x) + 1$.

Ainsi la fonction g vérifie les mêmes hypothèses que la question 1., donc par unicité prouvée dans cette question, on a : $\forall x \in] - \pi/2, \pi/2[$, $f(x) = g(x)$.

$$\forall x \in] - \pi/2, \pi/2[, \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$