

Correction des exercices du 02/12/2024 (Suites et séries de fonctions)

Ex 1 : Étudier la continuité et la dérivabilité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-n^2 x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f_n : x \mapsto x e^{-n^2 x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons d'abord la continuité de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = e^{-n^2 x} - n^2 x e^{-n^2 x} = (1 - n^2 x) e^{-n^2 x}$.
Ainsi la fonction f_n est croissante sur $[0, 1/n^2]$ et décroissante sur $[1/n^2, +\infty[$. Par ailleurs elle est positive, donc $|f_n|$ admet un maximum en $1/n^2$, puis $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^{-1}}{n^2}$.

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge d'où la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

La série de fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs f_0 est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$, donc la

fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-n^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour la dérivabilité nous n'allons pas pouvoir utiliser la convergence normale de $\sum f'_n$ car $f'_n(2/n^2) = -e^{-2}$ et ne peut pas tendre vers 0.

Montrons que la série de fonctions est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = (1 - n^2 x) e^{-n^2 x}$.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

On a : $\forall x \in [a, b], |f'_n(x)| \leq (1 + n^2 x) e^{-n^2 a} \leq (1 + n^2 b) e^{-n^2 a}$.

Ainsi on a : $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq (1 + n^2 b) e^{-n^2 a} = u_n$.

Or : $n^2 u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^4 b e^{-n^2 a} = b(n^2)^2 e^{-n^2 a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = o(1/n^2)$, puis $\sum_{n \geq 0} \|f'_n\|_{\infty, [a, b]}$

converge et donc $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-n^2 x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Regardons en détail la dérivabilité en 0.

Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, pour x positif.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $\frac{S(x) - S(0)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$.

La fonction $x \mapsto \frac{S(x) - S(0)}{x}$ est donc décroissante et admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ en 0

par valeurs supérieures. On a par décroissance : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{S(x) - S(0)}{x} \leq \ell$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{n=0}^N e^{-n^2 x} \leq \frac{S(x) - S(0)}{x}$, car on somme des termes positifs.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{n=0}^N e^{-n^2 x} \leq \ell$. Quand x tend vers 0, on obtient : $N + 1 \leq \ell$. Cela étant valable

pour tout N de $\mathbb{N}$ alors quand N tend vers $+\infty$, on a : $+\infty \leq \ell$, donc $\ell = +\infty$ et S n'est pas dérivable en 0.

Ex 2 : Montrer que : $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction : Soit $t \in]0, 1[$. On a $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, puis : $\frac{\ln(t)}{t-1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : t \mapsto -t^n \ln(t)$ définie sur $]0, 1[$.

On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ qui est la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$ définie sur $]0, 1[$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et positive sur $]0, 1[$.
Montrons qu'elle y est intégrable.

f_n est continue sur $]0, 1[$.

On a par ailleurs $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1/2} t^n |\ln(t)| = 0$ par croissance comparée. Ainsi $|f_n(t)| =_{t \rightarrow 0^+} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0, 1[$, alors f_n l'est aussi.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers S qui est continue par morceaux sur $]0, 1[$.

On a alors dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \int_0^1 S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n.$$

Reste à calculer $\int_0^1 f_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $X \in]0, 1[$. On a :

$$\int_X^1 t^n \ln(t) dt = \left[\frac{t^{n+1} \ln(t)}{n+1} \right]_X^1 - \int_X^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{X^{n+1} \ln(X)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{X^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Quand X tend vers 0, on a : $\int_0^1 f_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Fin de la correction des exercices de TD

Ex 3 : On pose $S : x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^x}\right)$ qui est bien définie sur $]1, +\infty[$ et nous devons montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = -\infty$.

Nous avons montré que $x \mapsto \ln\left(1 - \frac{1}{k^x}\right)$ est croissante pour tout $k \geq 2$. Ainsi la fonction S est croissante sur $]1, +\infty[$ et donc $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^+} S(x)$ existe et on a $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Par croissance, on a : $\forall x \in]1, +\infty[, \ell \leq S(x)$.

Soit $N \geq 2$. Comme les termes de la série $S(x)$ sont négatifs, alors pour x dans $]1, +\infty[$, on a :

$$S(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^x}\right) \leq \sum_{k=2}^N \ln\left(1 - \frac{1}{k^x}\right), \text{ puis : } \ell \leq \sum_{k=2}^N \ln\left(1 - \frac{1}{k^x}\right).$$

Comme on a une somme finie, on peut passer à la limite quand x tend vers 1 et donc on a :

$$\ell \leq \sum_{k=2}^N \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right).$$

Cette dernière relation est vraie pour tout $N \geq 2$, donc comme la série à termes négatifs $\sum_{k \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right)$

diverge ($\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{k}$), alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^N \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) = -\infty$, puis $\ell \leq -\infty$ et donc $\ell = -\infty$.