Correction des exercices du 09/12/2024 (Suites et séries de fonctions)

Ex 1 : 1. Donner le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 2} (-1)^n (\ln n) x^n$. On notera S sa somme.

2. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[$, $S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

3. Montrer que la limite de S en 1^- est égale à $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, que l'on calculera.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{|(-1)^{n+1} (\ln(n+1)) x^{n+1}|}{|(-1)^n (\ln n) x^n|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} |x| = \frac{\ln(n(1+1/n))}{\ln(n)} |x| = \frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} |x| = \left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

Grâce à la règle de d'Alembert, si $|x| < 1$, alors $\sum_{n \geq 2} (-1)^n (\ln n) x^n$ converge absolument et si $|x| > 1$,

alors $\sum_{n \geq 2} (-1)^n (\ln n) x^n$ diverge grossièrement. Ainsi le rayon de convergence vaut 1.

2. Soit $x \in]-1, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} [\ln(n+1) - \ln(n)] x^{n+1} = \\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(n+1) x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(n) x^{n+1} &= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \ln(k) x^k + x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n}_{=0 \text{ si } n=1} = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \ln(k) x^k + \end{aligned}$$

$x \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^{n+1} = (1+x)S(x)$. On a pu séparer les séries car elles convergent grâce à la première question.

En divisant par $1+x$, on obtient : $S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

3. La suite $\left(\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)_{n \geq 2}$ est décroissante de limite nulle. Ainsi grâce au TSSA, la série

$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.

Grâce au théorème d'Abel radial, on a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$,

donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Nous devons calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{l=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{2l}\right) - \sum_{l=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{2l-1}\right) = \sum_{l=1}^N \ln \left(\frac{2l+1}{2l}\right) - \sum_{l=1}^N \ln \left(\frac{2l}{2l-1}\right) = \\ \ln \left(\frac{3 \times 5 \times \dots \times (2N+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2N)}\right) - \ln \left(\frac{2 \times 4 \times \dots \times (2N)}{1 \times 3 \times \dots \times (2N-1)}\right) &= \ln \left(\frac{(3 \times 5 \times \dots \times (2N-1))^2 (2N+1)}{(2 \times 4 \times \dots \times (2N))^2}\right) = \end{aligned}$$

$$\ln \left(\frac{((2N)!)^2 (2N+1)}{(2 \times 4 \times \dots \times (2N))^4} \right) = \ln \left(\frac{((2N)!)^2 (2N+1)}{(2^N)^4 (N!)^4} \right).$$

Or grâce à la formule de Stirling :

$$\frac{((2N)!)^2 (2N+1)}{(2^N)^4 (N!)^4} \sim \frac{\left(\sqrt{2\pi 2N} \left(\frac{2N}{e} \right)^{2N} \right)^2 \times (2N)}{2^{4N} \left(\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e} \right)^N \right)^4} = \frac{4\pi N 2^{4N} N^{4N} \times (2N)/e^{4N}}{2^{4N} (2\pi N)^2 N^{4N}/e^{4N}} = \frac{8\pi N^2}{4\pi^2 N^2} = \frac{2}{\pi}. \text{ Ainsi quand}$$

$$N \text{ tend vers } +\infty, \text{ on a : } \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right).$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

Ex 2 : Déterminer $\text{Arctan}^{(k)}(0)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Correction : La fonction Arctan est DSE sur $] -1, 1[$ et on a : $\forall x \in] -1, 1[\text{ Arctan}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1}$.

On a par ailleurs la série de Taylor : $\forall x \in] -1, 1[\text{ Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Par unicité du DSE, on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \text{Arctan}^{(2p)}(0) = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}, \frac{\text{Arctan}^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} = \frac{(-1)^p}{2p+1}$ puis $\forall p \in \mathbb{N}, \text{Arctan}^{(2p+1)}(0) = (-1)^p (2p)!$.

Fin de la correction des exercices de TD

Ex 3 : Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$.

3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ et en 0^+ .

4. Montrer que $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

Correction :

Ex 4 :

1. Fait en TD

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{x+l+1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x+k+1}$.

Ainsi en utilisant la définition initiale de f , on a :

$$2f(x) = f(x) + f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} + \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x+k+1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^k}{x+k} - \frac{(-1)^k}{x+k+1} \right] =$$

$$\frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}.$$

3. Équivalent en 0 :

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a, grâce au calcul de la question précédente : $f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x+k+1}$.

Or la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k-1}}{x+k+1}$ vérifie le TSSA, donc :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x+k+1} \right| \leq \frac{1}{x+1} \leq 1.$$

On a donc $f(x) = \frac{1}{x} + O(1)$ au voisinage de 0, puis $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

Équivalent en $+\infty$:

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Grâce au résultat de la question précédente, on a : $f(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2(x+k+1)(x+k)}$.

De même $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2(x+k+1)(x+k)}$ vérifie le TSSA, donc :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2(x+k+1)(x+k)} \right| \leq \frac{1}{2(x+1)x} \leq \frac{1}{x^2}. \text{ On a donc } f(x) = \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ au voisinage de } +\infty, \text{ puis } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

4. Soit $t \in [0, 1[$. On a : $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$, puis $\frac{t^{x-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1}$. On ne peut pas appliquer

le théorème d'intégration terme à terme, car $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |(-1)^n t^{n+x-1}| dt = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+x}$ qui diverge. Le

théorème de primitivation terme à terme ne fonctionne pas non plus, car nous n'avons pas CVU. Reste à revenir aux sommes partielles.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a : $\sum_{n=0}^N (-1)^n t^{n+x-1} = t^{x-1} \sum_{n=0}^N (-t)^n = t^{x-1} \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1+t} = \frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{(-1)^{N+2} t^{N+x}}{1+t}$,

car la raison $-t$ est différente de 1.

Comme on a une somme finie et que toutes les fonctions sont intégrables sur $]0, 1[$

($\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, avec $1-x < 1$), alors :

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 t^{n+x-1} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-1)^{N+2} t^{N+x}}{1+t} dt,$$

soit :

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{x+n} = f(x) + \int_0^1 \frac{(-1)^{N+2} t^{N+x}}{1+t} dt.$$

Or on a : $\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{N+2} t^{N+x}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{x+N} dt = \frac{1}{x+N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, puis

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^{N+2} t^{N+x}}{1+t} dt \right) = 0$, et donc $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.