1 Utiliser le théorème de convergence dominé

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

1. pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I .
2. (f_n) converge simplement vers f et f est continue par morceaux sur I .
3. **(Domination)** il existe une fonction φ , continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

Alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$.

Ex 1 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$.

2 Étudier la continuité et la dérivabilité d'une série de fonctions

- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :
 - Pour tout n , la fonction f_n est continue sur I .
 - $\sum f_n$ converge uniformément ou normalement sur I (ou tout segment $[a, b]$ inclus dans I).

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :
 - pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
 - la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I
 - la série $\sum f'_n$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I).

Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Ex 2 :

1. Soit $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$, pour x dans $\mathbb{R}_+$.

- a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- b. A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$, pour x dans $\mathbb{R}_+$.

- a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Intégrer une série de fonctions terme à terme

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I .
- $\sum f_n$ converge simplement vers S qui est continue par morceaux sur I .
- $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge.

Alors S est intégrable sur I et :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Remarque : si vous devez montrer que $\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, écrire d'abord la fonction S sous forme de série.

Ex 3 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

2. Calculer $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) e^{-x} dx$.

4 Trouver des solutions DSE d'une équation différentielle

Rappel de la méthode : Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction DSE.

On note (E) une certaine équation différentielle, dont on cherche les solutions DSE.

- On suppose que le RCV de g noté R est strictement positif.
Dériver terme à terme g suivant l'ordre de l'équation différentielle dans l'intervalle de convergence :

$$\forall x \in]-R, R[, g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n ;$$

$$\forall x \in]-R, R[, g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \dots$$

- Injecter ces dérivées dans (E) et faire des changements d'indice pour obtenir que des puissances de x^n dans les sommes afin d'obtenir une expression du type $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0$.
 - Par unicité du DSE, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 0$, ce qui donne ensuite une relation de récurrence du type $a_{n+1} = \dots$ ou $a_{n+2} = \dots$
 - On cherche une formule de a_n que l'on valide en général par récurrence.
 - On cherche le rayon de convergence des séries entières obtenues (les calculs du départ seront donc licites).
 - Écrire éventuellement les fonctions obtenues à l'aide de fonctions usuelles.
-

Ex 4 : On considère l'équation différentielle : $(E) : xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$.

1. Chercher les fonctions DSE de cette équation différentielle.
2. Quelle est le rayon de convergence des solutions DSE ?
3. Écrire ces séries entières à l'aide de fonctions usuelles.