Correction des exercices du 16/12/2024 (Espaces probabilisés)

Ex 1 : Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité $p_1 > 0$ de toucher à chaque tour et le second la probabilité $p_2 > 0$.

1. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?

2. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu se termine.

3. Pour quelles valeurs de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

Correction : On note J_i l'événement : « le joueur i gagne », avec $i \in \{1, 2\}$.

1. Le joueur 1 ne peut gagner qu'à des moments impairs. On note P_k l'événement : « l'archer jouant au k-ème tour gagne », avec $k \in \mathbb{N}^*$.
Soit G_{2k+1} l'événement : « le premier archer jouant au $2k+1$-ème tour gagne », avec $k \in \mathbb{N}$.
Par indépendance des tirs, on a : $P(G_{2k+1}) = P\left((\bigcap_{i=0}^{k-1} \overline{P_{2i+1}}) \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \overline{P_{2i}}) \cap P_{2k+1} \right) = \prod_{i=0}^{k-1} P(\overline{P_{2i+1}}) \times \prod_{i=1}^{k} P(\overline{P_{2i}}) \times P(P_{2k+1}) = (1-p_1)^k (1-p_2)^k p_1$.
Ainsi $P(J_1) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} G_{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(G_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p_1)(1-p_2)]^k p_1 = \dfrac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$, par union disjointe.

2. De même on calcule la probabilité que le joueur 2 gagne. Soit G_{2k} l'événement : « le deuxième archer jouant au $2k$-ème tour gagne », avec $k \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance des tirs, on a :
$P(G_{2k}) = P\left((\bigcap_{i=0}^{k-1} \overline{P_{2i+1}}) \cap (\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{P_{2i}}) \cap P_{2k} \right) = \prod_{i=0}^{k-1} P(\overline{P_{2i+1}}) \times \prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{P_{2i}}) \times P(P_{2k}) = (1-p_1)^k (1-p_2)^{k-1} p_2 = [(1-p_1)(1-p_2)]^k \dfrac{p_2}{1-p_2}$.
Ainsi $P(J_2) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_{2k} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(G_{2k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p_1)(1-p_2)]^k \dfrac{p_2}{1-p_2} = \dfrac{p_2(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_2)(1-(1-p_1)(1-p_2))} = \dfrac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$.
La probabilité que le jeu se termine presque sûrement est $P(J_1 \cup J_2)$ et comme $J_1 \cup J_2$ est disjointe, alors $P(J_1 \cup J_2) = P(J_1) + P(J_2) = \dfrac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} + \dfrac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \dfrac{p_1+p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} = 1$, donc le jeu se finit presque sûrement.

3. Le jeu est équitable si et seulement si : $P(J_1) = P(J_2) \Leftrightarrow \dfrac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \dfrac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \Leftrightarrow p_1 = p_2(1-p_1) \Leftrightarrow p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.
Pour cela, on doit avoir $p_1 \neq 1$.

Ex 2 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{n+1}a_{n-1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq n+1$.

2. En déduire que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$. On notera S sa somme.

3. Déterminer une équation différentielle sur $]-1,1[$ de S et en déduire une expression de S.

4. En déduire l'expression exacte des a_n et de R.

Correction :

Ex 3 :

1. On raisonne par récurrence double.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose : $\mathcal{P}(n) : |a_n| \leq n+1$.
• $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiés.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.
On a : $a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{1}{n+2}a_n$, puis $|a_{n+2}| \leq |a_{n+1}| + \dfrac{1}{n+2}|a_n| \leq (n+2) + \dfrac{1}{n+2} \times (n+1) \leq (n+2)+1 = n+3$, d'où $\mathcal{P}(n+2)$, ce qui achève la récurrence.

2. On $n+1 \sim n$ donc $a_n = O(n)$, grâce à la question précédente. Or le rayon de convergence de $\sum nx^n$ vaut 1, donc : $R \geq 1$.

3. Soit $x \in]-1,1[$. On a par la relation de l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1}x^n = na_nx^n + a_nx^n - a_{n-1}x^n$.
Nous allons sommer toutes ces sommes pour $n \geq 1$ et les sommes vont bien converger car on fera apparaître du $S(x)$ ou $S'(x)$.
Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n$,
puis : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - a_1 = x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - a_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1}$
et donc : $S'(x) - 1 = xS'(x) + S(x) - 1 - xS(x)$ soit : $(1-x)S'(x) = (1-x)S(x)$.
Comme on a $x \neq 1$, alors $S'(x) = S(x)$.

4. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \lambda e^x$. Comme $S(0) = a_0 = 1$, alors $\lambda = 1$, puis : $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.
Par unicité du DSE : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{n!}$.
C'est la série entière de exp donc le rayon de convergence vaut $+\infty$.