Correction des exercices du 06/01/2025 (Variables aléatoires)

Ex 1 : On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

1. Donner la loi de X_n.
2. Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.
3. On note Y_n le rang du premier tirage à l'issu duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Donner la loi de Y_2 et Y_3.

Correction :

1. • $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.
   •. Soit A_l l'événement : « avoir tiré la boule l au premier tirage », avec $l \in [\![1, n]\!]$.
   Soit $k \geq 2$. Comme $(A_l)_{1 \leq l \leq n}$ est un système complet d'événements, alors grâce à la formule des probabilités totales :

$$P(X_n = k) = \sum_{l=1}^{n} P(X_n = k | A_l) P(A_l) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} P(X_n = k | A_l).$$

   Si on a tiré la boule l au premier tirage, alors la probabilité de tirer cette même boule pour chacun des tirages entre 2 et $k-1$ est $\frac{1}{n}$ et la probabilité de tirer une autre boule au k-ème tirage est $1 - \frac{1}{n}$. Par indépendance de tirages, on a : $P(X_n = k | A_l) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, puis

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

2. Il faut étudier la convergence et calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} k P(X_n = k)$.
   Dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, comme on a une variable aléatoire à valeurs positives, on a :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n-1}{n} \sum_{p=1}^{+\infty} (p+1) \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1}.$$

   Or pour x dans $]-1, 1[$, nous avons par dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle de convergence :
   $\sum_{p=1}^{+\infty} p x^{p-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^p\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Ainsi la série $\sum_{p \geq 1} p \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1}$ converge (car $-1 < 1/n < 1$) et vaut $\frac{1}{(1-1/n)^2} = \frac{n^2}{(n-1)^2}$.
   Par ailleurs $\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1} = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{l} = \frac{1}{1-1/n} = \frac{n}{n-1}$ (car $-1 < 1/n < 1$).
   La série $E(X)$ converge par somme de séries qui convergent et

$$E(X) = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{n}{n-1}\right) = \frac{n}{n-1} + 1 = \frac{2n-1}{n-1}.$$

   Autre méthode pour les 5/2 : On pose $Z_n = X_n - 1$. On a $Z_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :
   $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z_n = k) = P(X_n = k+1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$. Ainsi Z_n suit une loi $\mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et

donc admet une espérance qui vaut $\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n-1}$. Comme $X_n = Z_n + 1$, alors comme 1 admet une espérance, alors X aussi, puis par linéarité de l'espérance, on a : $E(X_n) = E(Z_n) + E(1) = \dfrac{n}{n-1} + 1 = \dfrac{2n-1}{n-1}$.

3. • On a $Y_2 = X_2$, car nous avons que deux boules, donc dès que l'on tire une boule différente de la première, on a tiré toutes les boules.
• On a $Y_3(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$.
Soit $l \geq 3$. Comme $(X_3 = m)_{m \geq 2}$ est un système complet d'événements, alors par la formule des probabilités totales, on a :
$P(Y_3 = l) = \displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \underbrace{P(Y_3 = l | X_3 = m)}_{=0 \text{ si } m \geq l} P(X_3 = m) = \sum_{m=2}^{l-1} P(Y_3 = l | X_3 = m) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{m-2}$. Or $P(Y_3 = l | X_3 = m) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{l-1-m} \times \dfrac{1}{3}$, car les tirages sont indépendants et entre les tirages $m+1$ et $l-1$, on n'a le choix qu'entre deux boules : celles tirées lors des m premiers tirages et la l-ème boule est la boule restante.

$$P(Y_3 = l) = \sum_{m=2}^{l-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1-m} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} \underbrace{=}_{k=l-1-m} \frac{2}{3^{l-1}} \sum_{k=0}^{l-3} 2^k = \frac{2}{3^{l-1}} \frac{2^{l-2}-1}{2-1} = \frac{2^{l-1}-2}{3^{l-1}}.$$