Correction des exercices du 13/01/2025 (Variables aléatoires)

Ex 1 : ***1.*** Pour $a > 0$ développer $f(t) = \dfrac{t}{a-t^2}$ en série entière et donner le rayon de convergence.

2. Donner la loi de X, telle que $G_X(t) = \dfrac{t}{2-t^2}$; donner son espérance et sa variance.

3. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $P(X=n) > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, Y une autre variable aléatoire de même loi que X. On suppose X et Y indépendantes ; $X+Y$ et $X-Y$ le sont-elles (on pourra s'intéresser à $P(X+Y=1, X-Y=0)$) ? La réciproque est-elle vraie ?

Correction :

1. On a pour $t^2 \neq a$: $\dfrac{t}{a-t^2} = \dfrac{t}{a} \times \dfrac{1}{1-\frac{t^2}{a}}$.

Pour $t \in]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[$, on a : $f(t) = \dfrac{t}{a} \times \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{a^n} \right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n+1}}{a^{n+1}}$, car $\left| \dfrac{t^2}{a} \right| < 1$.

Le rayon de convergence vaut au moins $\sqrt{a}$. Pour $t = \sqrt{a}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \dfrac{t^{2n+1}}{a^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ diverge grossièrement, donc le rayon de convergence vaut $\sqrt{a}$.

2. G_X est bien la fonction génératrice d'une variable aléatoire, car $G_X(1) = 1$ et les coefficients de G_X sont positifs.

Par ailleurs $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$, pour t dans $[-1, 1]$.

Par unicité du DSE, on a pour p dans $\mathbb{N}$, $P(X=2p) = 0$ et $P(X=2p+1) = \dfrac{1}{2^{p+1}}$.

Le rayon de convergence de G_X étant $\sqrt{2}$, alors G_X est deux fois dérivable en 1, donc X admet une espérance et une variance.

On a : $\forall t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[,\ G'_X(t) = \dfrac{2+t^2}{(2-t^2)^2}$ et $G''_X(t) = \dfrac{12t+2t^2}{(2-t)^3}$.

On a donc $E(X) = G'_X(1) = 3$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = G''_X(1) + E(X) - (E(X))^2 = 14 + 3 - 9 = 8$.

3. On a $P(X+Y=1, X-Y=0) = P(X=1/2, Y=1/2) = 0$, car X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Par ailleurs $P(X+Y=1) = P\left([(X=1)\cap(Y=0)] \cup [(X=0)\cap(Y=1)]\right) = P\left((X=1)\cap(Y=0)\right) + P\left((X=0)\cap(Y=1)\right) = P(X=1)P(Y=0) + P(X=0)P(Y=0) > 0$, par union disjointe et indépendance.

On a aussi par union disjointe et indépendance : $P(X=Y) = P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=n) \cap (Y=n) \right) = \displaystyle\sum_{n=0} P\left((X=n)\cap(Y=n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n) > 0$.

Ainsi $P(X+Y=1)P(X-Y=0) > 0$, puis :

$P(X+Y=1, X-Y=0) \neq P(X+Y=1)P(X-Y=0)$, donc $X+Y$ et X_Y ne sont pas indépendantes.

La réciproque est fausse. Si on prend $X = Y$, alors $X+Y = 2X$ et $X-Y = 0$ sont indépendantes car $X+Y$ est à valeurs dans $2\mathbb{N}$ et $X-Y$ est à valeurs dans $\{0\}$, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X+Y = 2n, X-Y=0) = P(X=n) = P(X=2n) \times 1 = P(X+Y=2n)P(X-Y=0)$.

Cependant X et Y ne sont pas indépendantes, car $P(X=0, Y=1) = P(X=0, X=1) = 0 \neq P(X=0)P(Y=0) > 0$.

Ex 2 : Soit X une variable aléatoire réelle et bornée. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \geq x) \leq e^{-2x}E(e^{2X})$.

Correction : Soit M tel que $|X| \leq M$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $(X \geq x) \Leftrightarrow (e^{2X} \geq e^{2x})$.
e^{2X} est une variable aléatoire positive et $e^{2X} \leq e^{2M}$ et e^{2M} admet une espérance, car $E(e^{2M}) = e^{2M}$.
Ainsi e^{2X} admet une espérance.

Ainsi grâce à l'inégalité de Markov, $P(e^{2X} \geq e^{2x}) \leq \dfrac{E(e^{2X})}{e^{2x}}$, puis comme $P(X \geq x) = P(e^{2X} \geq e^{2x})$, alors : $P(X \geq x) \leq e^{-2x}E(e^{2X})$.