1. Grâce à la formule de transfert, comme S_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, on a :

$$\mathtt{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P(S_n=k).$$

   Or par définition d'une loi binomiale, nous avons : $\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(S_n=k)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.
   Ainsi :

$$\boxed{\mathtt{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]=B_n(f)(x)}$$

2. La fonction f est continue sur le compact $[0,1]$, donc elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Donc par définition :

$$\boxed{\exists\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\forall a,b\in[0,1],\ |a-b|\le\alpha\Rightarrow|f(a)-f(b)|\le\varepsilon}$$

   Soit $k\in[\![0,n]\!]$ vérifiant $|k/n-x|\le\alpha$. On a bien k/n dans $[0,1]$ et en reprenant l'implication précédente avec $a=k/n$ et $b=x$, on trouve

$$\boxed{\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\le\varepsilon}$$

3. l'inégalité triangulaire nous donne :

$$\left|\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\le\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P(S_n=k)$$

$$\le\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\right)P(S_n=k)\le\sum_{|k/n-x|>\alpha}2\|f\|_\infty P(S_n=k)=2\|f\|_\infty\sum_{|k/n-x|>\alpha}P(S_n=k).$$

   Or : $\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=\bigcup_{0\le k\le n,|k/n-x|>\alpha}(S_n=k)$. Cette dernière union étant disjointe, on a : $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=\sum_{|k/n-x|>\alpha}P(S_n=k)$ et donc :

$$\boxed{\left|\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\le2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)}$$

4. On reprend α de la deuxième question.

   Soit $x\in[0,1]$. Comme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1$, alors :

$$|B_n(f)(x)-f(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(x\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|=$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|.$$

Découpons cette dernière somme en deux en séparant les k tels que $|k/n-x|>\alpha$ et $|k/n-x|\leq\alpha$. Ainsi

$$|B_n(f)(x)-f(x)|=\left|\sum_{|k/n-x|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)+\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leq$$

$$\sum_{|k/n-x|\leq\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P(S_n=k)+\left|\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|,$$

grâce à l'inégalité triangulaire.
Grâce à la deuxième partie de la question 2, on a :

$$\sum_{|k/n-x|\leq\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P(S_n=k)\leq\varepsilon\sum_{|k/n-x|\leq\alpha}P(S_n=k)\leq\varepsilon\sum_{k=0}^{n}P(S_n=k)=\varepsilon\times 1=\varepsilon,$$

car $(S_n=k)_{0\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements.
Pour la deuxième somme rappelons que l'on a montré dans la question 3 que :
$\left|\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right).$
On a donc grâce au rappel :

$$\left|\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}=0$, il $n_0\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\leq\varepsilon$.

Ainsi on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\Rightarrow\left|\sum_{|k/n-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leq\varepsilon$. En regroupant les deux inégalités, on a : $|B_n(f)(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon$. Ceci étant valable pour tout x de $[0,1]$ et 2ε étant une constante, on a : $\|B_n(f)-f\|_\infty\leq 2\varepsilon$, puis :

$$\boxed{\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\ \|B_n(f)-f\|_\infty\leq 2\varepsilon}$$

5. Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On considère $B_n(f)$ qui est une fonction polynomiale. La question précédente nous permet de dire que

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\ \|B_n(f)-f\|_\infty\leq 2\varepsilon.$$

Cela signifie que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|B_n(f)-f\|_\infty=0$.

$$\boxed{f\text{ est la limite uniforme de la suite de polynômes }(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}}$$