1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par composition et produit.
On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)| \times \|g\|_\infty$. Or f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, par comparaison. Ainsi $f * g(x)$ existe.

$$\boxed{f * g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f * g(x)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|dt \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \|f\|_1\|g\|_\infty$.
La constante $\|f\|_1\|g\|_\infty$ majore $f * g$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f*g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$. En posant le changement de variable $u = x-t$ soit $t = x-u$ qui donne une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :
$f * g(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)(-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)du = (g * f)(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (f * g)(x) = (g * f)(x)}$$

3. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on pose $h(x,t) = f(t)g(x-t)$.
   - Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}h(x,t) = f(t)g^{(k)}(x-t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \left|\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}h(x,t)\right| \leq |f(t)| \times \|g^{(k)}\|_\infty$. La fonction $t \mapsto \|g^{(k)}\|_\infty|f(t)|$ est indépendante de x et est intégrable sur $\mathbb{R}$, car f l'est.

$$\boxed{f * g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ (f * g)^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^{(k)}(x-t)dt}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $k_x : t \mapsto f(t)g(x-t)$.
   - Pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction k_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} k_x(t) = 0$ et la fonction nulle est continue par morceux sur $\mathbb{R}$.
   - On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R},\ |k_x(t)| \leq \|g\|_\infty|f(t)| = \varphi(t)$ et la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Grâce à l'extension du théorème de convergence dominé, on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dt$, soit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = 0$, soit :

$$\boxed{\lim_{+\infty} f * g = 0}$$

5. Grâce aux questions **1** et **3**, T va bien de E dans $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Elle est linéaire, par linéarité de l'intégrale.
La première question nous permet de dire que : $\forall g \in E,\ \|T(g)\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$. Ceci caractérisant la continuité des applications linéaires,

$$\boxed{T : g \mapsto f * g \text{ est continue de } (E, \|.\|_\infty) \text{ dans } (\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)}$$

6. Comme f est nulle en dehors de $[-A, A]$, alors $f*g(x) = \int_{-A}^{A} f(t)g(x-t)dt$. Soit t dans $[-A, A]$, alors : $-A \leq -t \leq A$.
Ainsi
   - si on a : $x > 2A$, alors $x - t > 2A - A = A$, donc : $g(x-t) = 0$ et donc $f * g(x) = 0$.
   - si on a : $x < -2A$, alors $x - t < -2A + A = -A$, donc : $g(x-t) = 0$ et donc $f * g(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour } B = 2A,\ f * g \text{ est nulle en dehors du segment } [-B, B]}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$ converge et via le changement de variable $u = x - t$, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u)du$. Ainsi $t \mapsto g^2(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ tout comme f^2. Par ailleurs : $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)g(x-t)| \leq \frac{1}{2}(f^2(t) + g^2(x-t))$. Ainsi $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $f * g(x)$ existe.

$$\boxed{f * g \text{ existe}}$$

De l'inégalité : $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)g(x-t)| \leq \frac{1}{2}(f^2(t) + g^2(x-t))$, on en déduit que : $|f*g(x)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|dt \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x-t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u)dt = \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$, grâce au changement de variable $u = x - t$.

$$\boxed{\|f * g\|_\infty \leq \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)}$$