

Ex 1 : Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Calculer $f(x+1) - f(x)$ pour $x > -1$.
4. En déduire une expression de $f(x)$ sous forme de somme.

Correction :

1. On pose $g : (x, t) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}$ défini sur $] -1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.
- Soit $x \in] -1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Problème en 0 : $\frac{te^{-tx}}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t}{t} = 1$, donc la fonction $t \mapsto g(x, t)$ se prolonge par continuité en 0, elle est donc intégrable sur $]0, 1]$.

Problème en $+\infty$: $t^2 \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^3 e^{-tx}}{e^t} = t^3 e^{-(x+1)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, par croissance comparée car $x+1 > 0$. On a donc $g(x, t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in] -1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} = -\frac{t^2 e^{-tx}}{e^t - 1}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[a, b] \subset] -1, +\infty[$. On a : $\forall (x, t) \in [a, b] \times] -1, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right| \leq \frac{t^2 e^{-ta}}{e^t - 1} = \varphi(t)$, car t est positif ($a \leq x \Rightarrow ta \leq tx \Rightarrow -tx \leq -ta$).

La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Problème en 0 : $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t^2}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t^2}{t} = t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, donc la fonction φ se prolonge par continuité en 0, elle est donc intégrable sur $]0, 1]$.

Problème en $+\infty$: $t^2 |\varphi(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^4 e^{-ta}}{e^t} = t^4 e^{-(a+1)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, par croissance comparée car $a+1 > 0$. On a donc $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$, donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominé à paramètre continu. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On

pose $h_x : t \mapsto \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction h_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_x(t) = 0$ et $t \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soient $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. On a : $|h_x(t)| \leq \frac{t}{e^t - 1} = \psi(t)$, avec ψ continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$, grâce au premier point de la première question pour $x = 0$.

Ainsi grâce au théorème de convergence dominé à paramètre continu,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} h_x(t) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

3. Soit $x \in] -1, +\infty[$. On a :

$$f(x+1) - f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{te^{-t(x+1)}}{e^t - 1} - \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t(x+1)}}{e^t - 1} (1 - e^t) dt = - \int_0^{+\infty} te^{-t(x+1)} dt.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\int_0^A te^{-t(x+1)} dt = \left[\frac{te^{-t(x+1)}}{-(x+1)} \right]_0^A + \frac{1}{x+1} \int_0^A e^{-t(x+1)} dt = \frac{Ae^{-A(x+1)}}{-(x+1)} + \frac{e^{-A(x+1)} - 1}{-(x+1)^2}.$$

Par croissance comparée, quand A tend vers $+\infty$, on a : $\int_0^{+\infty} te^{-t(x+1)} dt = \frac{1}{(x+1)^2}$, donc

$$f(x+1) - f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

4. Soit $x \in]-1, +\infty[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x+n+1) - f(x) = \sum_{k=0}^n (f(x+k+1) - f(x+k)) = -\sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+1+k)^2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n+1) = 0$, grâce à la question 2. et que $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(x+1+k)^2}$ converge, alors quand n tend vers $+\infty$, on a : $-f(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1+k)^2}$, puis $f(x) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+l)^2}$.

Fin de la correction des exercices de TD

Ex 2 : Montrer, en utilisant une variable aléatoire, l'inégalité $\frac{n-1}{n} 2^{4n} \leq \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k}$.

Correction : On veut montrer que : $\frac{n-1}{n} \leq \sum_{k=n+1}^{3n-1} \frac{1}{2^{4n}} \binom{4n}{k}$.

Soit X suivant une loi $\mathcal{B}(4n, 1/2)$ et $E(X) = 2n$.

Faisons apparaître l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev.

On a :

$$\sum_{k=n+1}^{3n-1} \frac{1}{2^{4n}} \binom{4n}{k} = \sum_{k=n+1}^{3n-1} P(X = k) = P(n < X < 3n) = P(-n < X - 2n < n) = P(|X - 2n| < n) = 1 - P(|X - E(X)| \geq n).$$

Comme X est dans L^2 , alors grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq n) \leq \frac{V(X)}{n^2} = \frac{4n \times (1/2) \times (1 - 1/2)}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

On a donc

$$\sum_{k=n+1}^{3n-1} \frac{1}{2^{4n}} \binom{4n}{k} \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Ex 3 : On pose $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\sin(t)}{1+t} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que f y est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser un équivalent en 0.

Correction :

1. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{1+t}$ n'est pas intégrable au voisinage de -1 , car $\frac{\sin(t)}{1+t} \sim_{t \rightarrow -1} \frac{\sin(1)}{1+t}$, par comparaison de fonctions positives au voisinage de -1 .

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{1+t}$ est continue sur $[x, 4x]$, donc $f(x)$ existe.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $4x < x$ et on ne veut pas que -1 soit dans $[4x, x]$. Ainsi on veut $x < -1$ ou $-1 < 4x$.

Ainsi f est définie sur $] -\infty, -1[\cup] -1/4, +\infty[$.

2. Soit F une primitive de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{1+t}$ sur $] -\infty, -1[$ et $] -1/4, +\infty[$.

Pour $x \in] -\infty, -1[\cup] -1/4, +\infty[$, on a : $f(x) = F(4x) - F(x)$. Ainsi par composition/opération F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, -1[\cup] -1/4, +\infty[$ et :

$$\forall x \in] -\infty, -1[\cup] -1/4, +\infty[, f'(x) = 4F'(4x) - F'(x) = \frac{4 \sin(4x)}{1+4x} - \frac{\sin(x)}{1+x}.$$

On a $f(0) = f'(0) = 0$. Si on veut utiliser la formule de Taylor-Young, il faut encore dériver une fois.

On a :

$$\forall x \in] -\infty, -1[\cup] -1/4, +\infty[, f''(x) = \frac{16 \cos(4x)}{1+4x} - \frac{16 \sin(4x)}{(1+4x)^2} - \frac{\cos(x)}{1+x} + \frac{\sin(x)}{(1+x)^2}.$$

On a donc $f''(0) = 15$.

Comme f est deux fois dérivable au voisinage de 0, alors grâce à la formule de Taylor-Young, on a : $f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 f''(0)/2 + o(x^2) = 15x^2/2 + o(x^2)$, puis $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 15x^2/2$.