1. (a) On a une factorisation de P de la forme : $P_n = \prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{2s_i+1}\prod_{i=1}^{p}(X-\gamma_i)^{2t_i}S(X)$ où S est un polynôme sans racines dans $]a,b[$ (les γ_i sont les racines de multiplicité paire de P_n dans $]a,b[$). Comme S est peut être considéré comme une fonction polynôme sur $]a,b[$, alors S est continue sur cet intervalle et ne s'y annule jamais. Ainsi S garde un signe constant sur $]a,b[$ (si S change de signe sur $]a,b[$, alors grâce au théorème des valeurs intermédiaires, S s'annule au moins une fois sur $]a,b[$).
   On a donc : $Q_nP_n = \prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{2(s_i+1)}\prod_{i=1}^{p}(X-\gamma_i)^{2t_i}S = \left(\prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{s_i+1}\prod_{i=1}^{p}(X-\gamma_i)^{t_i}\right)^2 S$ et donc P_nQ_n est de signe constant sur $]a,b[$. Par continuité de la fonction polynôme P_nQ_n,

$$\boxed{P_nQ_n \text{ est de signe constant sur } [a,b]}$$

   (b) On suppose $d°Q_n < n$. Comme Q_n est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X] = vect(P_0,...,P_{n-1})$, alors $(P_n|Q_n) = 0$, car P_n est orthogonal à $P_0,...,P_{n-1}$. Ainsi $0 = \int_a^b P_nQ_nw$. Or la fonction $x \mapsto P_n(x)Q_n(x)\omega(x)$ est continue et de signe constant sur $[a,b]$, donc elle est nulle sur $[a,b]$. Comme ω ne s'annule jamais sur $[a,b]$, alors P_nQ_n est nulle sur $[a,b]$. Ainsi le polynôme P_nQ_n a une infinité de racines, donc :

$$\boxed{d°Q_n < n \Rightarrow P_nQ_n = 0}$$

   cela est impossible car aucun de ces deux polynômes n'est nul ($\mathbb{R}[X]$ est un anneau intègre).

   (c) Par construction, le degré de Q_n ne peut dépasser n. Grâce à la question précédente, on a : $\underline{d°Q_n = n}$.
   Ainsi on a $r = n$, donc $\beta_1,...,\beta_n$ sont n racines distinctes de P_n qui est de degré n. Ainsi $\beta_1,...,\beta_n$ constitue la liste complète des racines de P_n avec multiplicité (donc toutes ces racines sont de multiplicité un, sinon on dépasse le degré de P_n).

$$\boxed{P_n \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ et que toutes ses racines sont simples et dans }]a;b[}$$

2. XP_{n+1} est dans $\mathbb{R}_{n+2}[X] = vect(P_0,...,P_{n+2})$. Ainsi il existe des réels $c_0,...,c_{n+2}$ tels que : $XP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$.
   • Soit $l \in [\![0,n-1]\!]$. On a par orthogonalité de $(P_0,...,P_{n+2})$: $(XP_{n+1}|P_l) = c_l\|P_l\|^2$. Or : $(XP_{n+1}|P_l) = \int_a^b XP_{n+1}P_l\omega = \int_a^b P_{n+1}XP_l\omega = (P_{n+1}|XP_l)$. Or XP_l est dans $\mathbb{R}_n[X] = vect(P_0,...,P_n)$ et comme P_{n+1} est orthogonal à $P_0,...,P_n$, alors $(XP_{n+1}|P_l) = 0$, puis $0 = c_l\|P_l\|^2$. Comme P_l est non nul, alors $\underline{c_l = 0}$.
   • Le même raisonnement conduit à $(XP_{n+1}|P_{n+1}) = c_{n+1}\|P_{n+1}\|^2$, donc $\underline{c_{n+1} = \dfrac{(XP_{n+1}|P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2}}$.
   • Par construction de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le polynôme XP_{n+1} est de degré $n+2$ et de coeffient dominant un. Dans la somme $\sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$, seul P_{n+2} est de degré $n+2$ et son coefficient dominant est un. En identifiant le coefficient de dominant de degré $n+2$ dans $XP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$, on trouve $\underline{c_{n+2} = 1}$.
   • En raisonnant comme dans le premier point, on a : $(XP_{n+1}|P_n) = c_n\|P_n\|^2$ et $(XP_{n+1}|P_n) = (P_{n+1}|XP_n)$. Or en appliquant les raisonnements précédents à P_n au lieu de P_{n+1},

on a : $XP_n = P_{n+1} + c'_n P_n + c'_{n-1} P_{n-1}$. Ainsi par orthogonalité de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $(P_{n+1}|XP_n) = (P_{n+1}|P_{n+1}) = \|P_{n+1}\|^2$. Ainsi on a : $\underline{c_n = \dfrac{||P_{n+1}||^2}{||P_n||^2}}$.

$$\boxed{XP_{n+1} = P_{n+2} + b_n P_{n+1} + a_n P_n \text{ avec } a_n = \frac{||P_{n+1}||^2}{||P_n||^2} \text{ et } b_n = \frac{(XP_{n+1}|P_{n+1})}{||P_{n+1}||^2}}$$